

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия №1»

ПРИЛОЖЕНИЕ

к Рабочей программе факультатива по математике
«Занимательная математика»
для учащихся 6 класса

Методическая разработка
«Круги Эйлера»

Автор:
Зарубина Лариса Владимировна,
учитель математики
МБОУ «Гимназия №1»

г. Усолье-Сибирское
2023 год

Объединение и пересечение (круги Эйлера)

2 часа

Учебно-воспитательные цели.

Тема тесно связана с алгеброй множеств. Применение кругов Эйлера придает задачам алгебры множеств наглядность и простоту. Круги Эйлера с успехом применяются также в логических задачах для изображения множеств истинности высказываний и во многих других случаях. Изображение условий задачи с помощью кругов Эйлера, как правило, упрощает и облегчает путь к ее решению.

Данная тема, безусловно, расширяет математический кругозор учащихся, обогащает арсенал средств, используемых в решении разнообразных задач.

Методические замечания.

Задачи расположены в данном занятии по принципу «от простого к сложному». В первой задаче, самой простой, круги Эйлера появляются естественным образом, как реальные круги на школьном дворе, где мы располагаем учеников. Проверив усвоение этой цели с помощью «Вопросов для проверки», можно переходить к более сложным задачам.

Настоящая тема может послужить хорошим поводом для того, чтобы рассказать учащимся о Леонарде Эйлере и его трудах.

Занятие №26

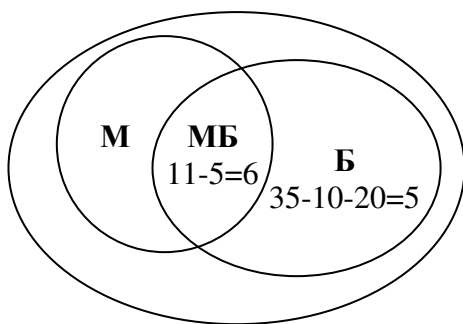
Тема: Пересечение и объединение (круги Эйлера)

Ход занятия.

I. Объяснение нового материала.

Новый метод решения полезно рассмотреть на примере следующей задачи.

Задача №1. Пересчитай математиков. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 – в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?



Обсуждение. Изобразим эти кружки.

Можем, например, начертить в школьном дворе большой круг, а в нем два поменьше.

В левый круг, обозначенный буквой **М**, поместим всех математиков, а в правый, обозначенный буквой **Б**, всех биологов. Очевидно, в общей части кругов, обозначенной буквами **МБ**, окажутся те самые биологи-математики, которые нас интересуют. Остальных ребят класса, а их 10, попросим не выходить из внешнего круга, самого большого. Теперь подсчитаем: всего внутри большого круга 35 ребят, внутри двух меньших $35 - 10 = 25$ ребят. Внутри «математического круга» **М** находятся 20 ребят, значит, в той части «биологического» круга, которая расположена вне круга **М**, находятся $25 - 20 = 5$ биологов, не посещающих математический кружок. Остальные биологи, их $11 - 5 = 6$ человек увлекаются математикой.

Вопросы для проверки:

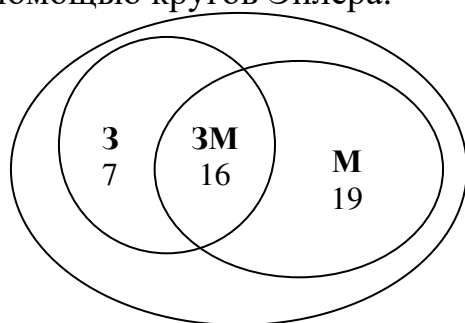
1. Сколько ребят занимаются только в математическом кружке и как это показано на рисунке?
2. Сколько ребят посещают только один какой-нибудь кружок?

Рисунки, подобные приведенному в решении, обычно называют «кругами Эйлера».

Один из величайших математиков петербургский академик Леонард Эйлер за свою долгую жизнь (он родился в 1707 г., а умер в 1783г.) написал более 850 научных работ. В одной из них и появились эти круги. Эйлер писал тогда, что «они подходят для того, чтобы облегчить наши размышления». Наряду с кругами в подобных задачах применяют прямоугольники и другие фигуры.

Задача №2. Коллекционеры. Из 52 школьников 23 собирают значки, 35 собирают марки, а 16 – и значки, и марки. Остальные не увлекаются коллекционированием. Сколько школьников не увлекаются коллекционированием?

Обсуждение. В условии этой задачи не так легко разобраться. Если сложить 23 и 35, то получится больше 52. Это объясняется тем, что некоторых школьников мы здесь учли дважды, а именно тех, которые собирают и значки, и марки. Чтобы легче решить задачу, представим ее данные с помощью кругов Эйлера.



На этой схеме большой круг означает всех школьников, о которых идет речь. Круг **З** изображает школьников, собирающих значки (их 23), а круг **М** – школьников, собирающих марки (всего из 35). В пересечении кругов **З** и **М** стоит число 16 – те, кто собирает и значки и марки. Значит, только значки собирает $23 - 16 = 7$ человек, только марки собирает $35 - 16 = 19$ человек.

Всего марки и значки собирает $19 + 7 + 16 = 42$ человека. Остается $52 - 42 = 10$ человек, не увлеченных коллекционированием. Это число можно вписать в свободное поле большого круга.

Реши самостоятельно.

1. Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский. Сколько туристов знали французский и немецкий языки?

Решение: $100 - 10 = 90$ – знали немецкий или французский; $90 - 75 = 15$ – не знали немецкий; $90 - 83 = 7$ – не знали французского; $90 - 15 - 7 = 68$ – знали и французский, и немецкий.

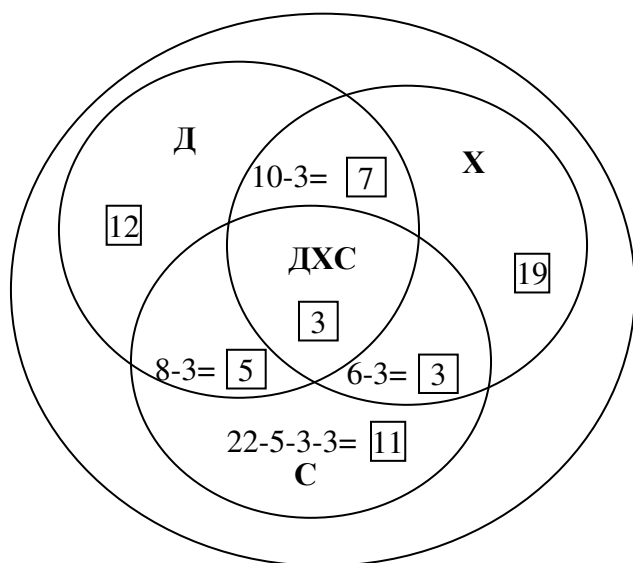
2. В доме 120 жильцов, у некоторых из них есть собаки и кошки. Из них 23 имеют собак, 31 имеют кошек и 8 – и собак и кошек. Сколько человек не имеют ни кошек, ни собак?

Решение: $23 - 8 = 15$ жильцов имели только собаку, $31 - 8 = 23$ жильца имели только кошку, $120 - 15 - 23 - 8 = 74$ жильца не имеют ни кошек, ни собак.

Рассмотрим задачу с большим количеством условий.

Задача №3. Занятия в кружках. В летнем лагере 70 ребят. Их них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

Обсуждение. Изобразим на рисунке круги Эйлера. В большом круге, изображающем всех ребят, поместим три меньших круга Д, Х и С,



изображающих драмкружок, хор и спортсменов. Представим себе, что все 70 ребят расположились внутри большого круга, а драмкружок, хор и спортсмены расположились в кругах Д, Х и С соответственно. В круге Д по условию 27 ребят из драмкружка, в круге Х - 32 певца, а в круге С – 22 спортсмена. Те 10 ребят из драмкружка, которые поют в хоре, окажутся в общей части ДХ кругов Д и Х. Трое из них еще и спортсмены, они окажутся в общей части трех

кругов ДХС. Остальные семеро из десяти спортом не увлекаются, они расположатся внутри фигуры ДХ, но вне круга С. Если договорится обозначать внешность круга С через C' , то эти семеро окажутся внутри фигуры $ДХС'$. Точно так же найдем, что имеются $8-3=5$ спортсменов драмкружка, не поющие в хоре, - $ДХ'C$ и $6-3=3$ поющих спортсмена, не посещающих драмкружок, их место – фигура $Д'ХС$, представляющая собой общую часть кругов ХС кругов Х и С, за вычетом фигуры ДХС. Здесь, как и ранее, $Д'$ обозначает внешность круга Д.

Из рисунка видно, что $5+3+3=11$ спортсменов посещают хор или драмкружок. Остальные $22-11=11$ увлекаются только спортом, они располагаются внутри фигуры $Д'Х'C$, т.е. в круге С, но вне кругов Д и Х. Аналогично этому найдем, что внутри фигуры $ДХ'C'$ находятся 12 ребят из драмкружка, а внутри фигуры $Д'ХС'$ - 19 ребят из хора. Вычитая из общего числа ребят 70 числа, обведенные на рисунке квадратными рамочками, найдем число ребят вне кругов Д, Х и С. Их оказалось 10, т.е. 10 ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке.

Реши самостоятельно.

1. Из 250 человек читают научную литературу 108, художественную – 170, учебную – 150, научную и художественную – 70, художественную и учебную – 100, научную и учебную – 80, научную, художественную и учебную – 50. Сколько человек читает только научную литературу, только художественную, только учебную? Сколько человек не читает указанную литературу?

Ответ: только научную литературу - 8, только художественную - 50, только учебную – 20 человек. 22 человека не читает указанную литературу.

2. На пикник поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 50 человек, с сыром – 60 человек, с ветчиной – 40 человек, с сыром и

колбасой – 30 человек, с колбасой и ветчиной – 15 человек, с сыром и ветчиной – 25 человек, 5 человек взяли с собой все три вида бутербродов, а несколько человек вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

Ответ: 7 человек взяли с собой пирожки.

II. Домашнее задание.

1. Из 35 учащихся 6 класса 22 выписывают журнал, 27 – газету, а 3 ученика не выписывают ни газету, ни журнал. Сколько учащихся выписывают газету и журнал? (Ответ: $35-3-32$ – выписывают газету или журнал; $32-22=10$ – не выписывают журнал; $32-27=5$ – не выписывают газету; $32-10-5=17$ – выписывают и журнал, и газету).
2. В одном из лыжных соревнований на дистанциях 3, 5, 10 км приняли участие соответственно 80, 73, 51 лыжник, из которых 38 человек участвовали в соревнованиях на дистанциях 3 и 5 км; 22 человека – на 3 и 10 км; 17 человек на 5 и 10 км; 8 человек - на всех дистанциях. Подсчитать сколько лыжников участвовало в соревнованиях только на 3 км, только на 5 км, только на 10км? Сколько спортсменов приняло участие в лыжных соревнованиях? (Ответ: только на 3 км - 28, только на 5 км - 26, только на 10км – 20 человек. 135 спортсменов приняло участие в лыжных соревнованиях).

Занятие №27

Тема: Пересечение и объединение (круги Эйлера)

Ход занятия.

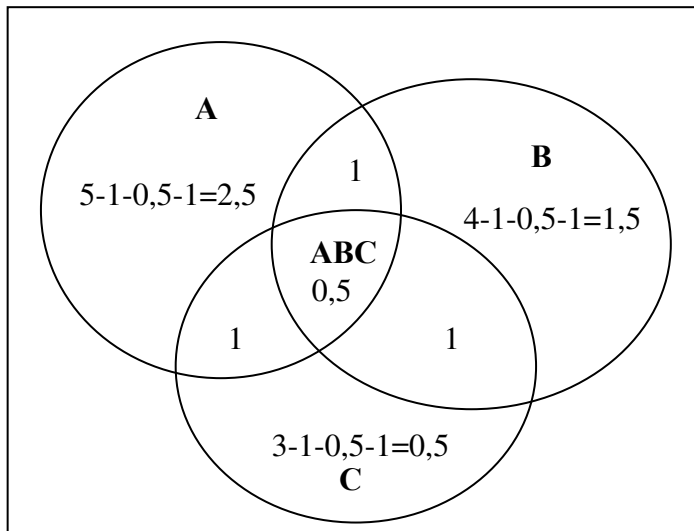
I. Разбор домашнего задания.

II. Объяснение нового материала.

Рассмотрим более сложные задачи.

Задача №1. Про ковры. Пол комнаты площадью 12 м^2 покрыт тремя коврами: площадь одного ковра 5 м^2 , другого – 4 м^2 и третьего – 3 м^2 . Каждые два ковра перекрываются на площади $1,5 \text{ м}^2$, причем $0,5 \text{ м}^2$ из этих полутора квадратных метров приходится на участок пола, где перекрываются все три ковра. Какова площадь пола, не покрытая коврами? Какова площадь участка, покрытого только первым ковром?

Обсуждение. Изобразим на рисунке пол комнаты в виде прямоугольника. Так как форма ковров в данной задаче роли не играет, будем изображать ковры в виде кругов Эйлера: круг **A** изображает больший ковер, круг **B** – средний ковер и круг **C** – меньший.



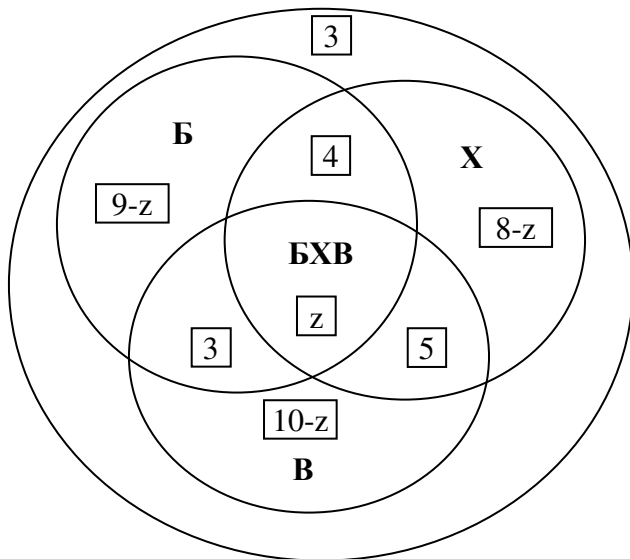
Пользуясь обозначениями с прошлого занятия, общую часть ковров **A** и **B** будем обозначать **AB**, общую часть ковров трех ковров – **ABC**, часть пола, покрытую только двумя коврами **A** и **B**, – **ABC'**, часть пола, не покрытую коврами, – **A'B'C'** и т. д. Очевидно, часть **AB'C** имеет площадь $1,5 - 0,5 = 1 \text{ м}^2$. Такова же площадь участка **ABC'** и участка **A'BC**. Дальнейшие расчеты аналогичны задачам с прошлого урока. Ответ на первый вопрос

задачи – площадь участка **A'B'C'** равна 4 м^2 . Ответ на второй вопрос задачи – площадь участка **AB'C'** равна $5 - 0,5 - 1 - 1 = 2,5 \text{ м}^2$.

Задача №2. Спортивный класс. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 – в хоккей, 18 – в волейбол. Увлекаются двумя видами спорта – баскетболом и хоккеем – четверо, баскетболом и волейболом – трое, волейболом и хоккеем – пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни волейболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя

видами спорта? Сколько ребят увлекаются лишь одним из этих видов спорта?

Обсуждение. Воспользуемся кругами Эйлера. Пусть большой круг изображает всех учащихся класса, а три меньших круга **Б**, **Х** и **В** изображают соответственно баскетболистов, хоккеистов и волейболистов. Тогда фигура



БХВ, общая часть кругов **Б**, **Х** и **В**, изображает ребят, увлекающихся всеми тремя видами спорта. Обозначим их число через z .

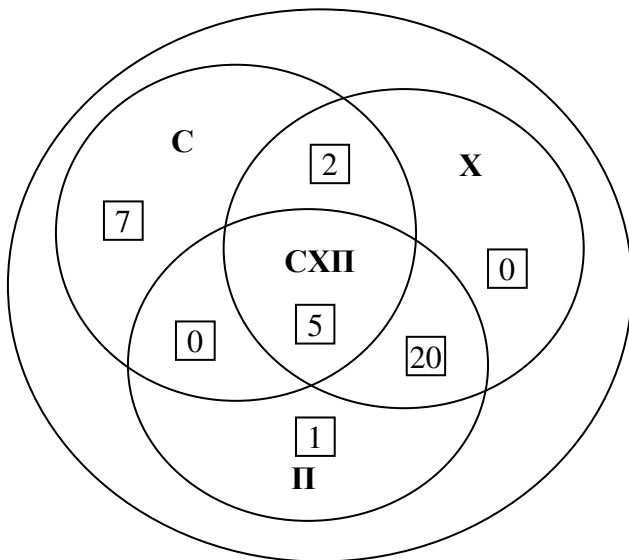
Из рассмотрения кругов видно, что одним лишь видом спорта – баскетболом занимаются $16-(4+z+3)=9-z$ ребят, одним лишь хоккеем $8-z$, одним лишь волейболом $10-z$. Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы ребят; количества ребят в

каждой группе обведем на рисунке в рамочки:

$$38=3+(9-z)+(8-z)+(10-z)+4+3+5+z,$$

откуда $z = 2$. Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта. Складывая количества ребят, увлекающихся лишь одним спортом, т.е. числа $9-z$, $8-z$ и $10-z$, где z , как мы теперь знаем, равно 2, найдем ответ на второй вопрос задачи: 21 человек.

Задача №3. Удивительный класс. В этом классе учатся 35 человек, и все они либо играют на скрипке, либо разводят хомяков, либо плавают в бассейне. Многие успевают заниматься и тем, и другим. Больше всего пловцов-хомяководов – 25, пятеро из них еще и на скрипке играют. Чемпион класса по плаванию на скрипке не играет и хомяков не разводит, а два его



друга-хомяковода плавать не умеют, зато скрипачи превосходные. Среди скрипачей есть семеро, которые не плавают и хомяков не разводят. Сколько в классе скрипачей? Сколько человек посещают бассейн? Сколько хомяководов не увлекаются ни плаванием, ни музыкой?

Обсуждение. Изобразим данные задачи при помощи кругов Эйлера:

круг С изображает скрипачей, круг Х – хомяководов, круг П – пловцов. Число ребят, о которых рассказывается в условии задачи, равно $25+1+2+7=35$, и они составляют весь класс, так как по условию в классе 35 человек. Теперь нетрудно ответить на вопросы задачи: в классе 14 скрипачей, 26 ребят посещают бассейн, а хомяководов, не плавающих и не играющих на скрипке, вообще нет – множество их пусто.

Реши самостоятельно.

1. Школа предоставила отчет: «Всего в школе 60 шестиклассников, из них 37 отличников по математике, 33 – по русскому языку и 42 – по физкультуре. При этом у 21 человека «пятерки» и по математике, и по русскому, у 23 – по математике и по физкультуре, у 22 – по русскому и по физкультуре. При этом 20 человек учатся на «отлично» по всем трем предметам». Верен ли отчет школы?

Ответ: Отчет не верен, так как получается всего учащихся 66, а по условию задачи их 60.

2. Колхозник купил на рынке корову, козу, овцу и свинью за 13250 р. Коза, свинья и овца вместе стоят 4250 р. Корова, свинья и овца вместе стоят 12250 р.; коза и свинья вместе стоят 2750 р. Сколько стоит каждое животное в отдельности?

Ответ: Корова – 9000 р., коза – 1000 р., свинья 1750 р., овца – 1500 р.

III. Домашнее задание.

1. В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике – 17 человек и по физике – 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по русскому языку – 4 человека, по математике – 4 человека и по физике – 11 человек. Семь человек имеют «тройки» и по математике, и по физике, из них пятеро имеют «тройки» и по русскому языку. Сколько человек учатся без «троек»? Сколько человек имеет «тройки» по двум из трех предметов? (Ответ: 4 человека; 12 человек).
2. В отчете об участии учащихся старших классов в работе научных кружков было записано, что из 580 учащихся занимаются в кружках: математическом – 270 учеников, физическом – 203 ученика, причем из них 81 ученик посещает математический и физический кружки, 63 ученика – физический и химический, 65 учеников – математический и химический, 27 учеников – математический, физический и химический, остальные 135 учеников являются членами других кружков. Не содержит ли отчет ошибок? (Ответ: отчет верен).

IV. Дополнительные задачи.

1. В одном конструкторском бюро работает 230 сотрудников, из которых 140 старше 25 лет, 103 имеют высшее образование, а остальные –

среднее техническое. В бюро 90 мужчин старше 25 лет, из которых 58 имеют высшее образование. 28 сотрудников бюро, моложе 25 лет, имеют высшее образование, из них 15 женщин. Кроме того, известно, что мужчин в бюро на 40 человек больше, чем женщин. Определить:
Сколько мужчин моложе 25 лет не имеют высшего образования;
Сколько мужчин старше 25 лет не имеют высшего образования;
Сколько женщин моложе 25 лет не имеют высшего образования;
Сколько женщин старше 25 лет не имеют высшего образования;
Сколько в бюро работает мужчин и сколько женщин?

2. Группа студентов путешествовала. Каждый из них ходил либо в горы, либо в пещеры, но многие ходили и в горы, и в пещеры. В горах было 88% студентов, в пещерах – 89%. Определить, сколько процентов студентов было и в горах, и в пещерах.
3. В одной экскурсии участвовали семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, комсомольцев и комсомолок всего 24. Пионеров столько, сколько мальчиков, вступивших в комсомол. Сколько всего ребят участвовало в экскурсии? (40 человек).