

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия № 1»**

Научно-практическая конференция «СТУПЕНИ – ЮНИОР»

Построение сечений многогранника

Выполнила: Злыднева Елена
Андреевна, ученица 10Б класса

Руководитель: Зарубина Лариса
Владимировна, учитель
математики.

г. Усолье-Сибирское
2019

Аннотация.

В данной работе говорится о методах построения сечений многогранника, методы подробно описаны и разобраны на конкретных примерах.

Эта работа позволит сформировать представление о сечении многогранника.

В ней рассматриваются методы построения сечений многогранника и конкретные примеры построения сечений.

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Что такое сечение?	
Сечение.....	5
Глава 2. Методы построения сечений многогранников.....	7
Метод следов.....	8
Метод вспомогательных сечений.....	8
Комбинированный метод.....	8
Координатный метод построения сечений.....	9
Глава 3. Построение сечений многогранников	10
Примеры построения сечений	10
Заключение.....	17
Список литературы.....	17

ВВЕДЕНИЕ

Для скульптур геометрия является тем, что грамматика является для искусства писателя.

Г. Аполлинер.

Актуальность: Построение сечений широко используется в архитектуре, строительном деле, машиностроении, геодезии, и во многих других областях науки и техники, а в школьном курсе решению задач такого типа уделяется мало времени, поэтому изучение этой темы актуально.

Новизна: В работе представлены методы построения сечений и приведены примеры построения сечений в многограннике.

Цель работы: научиться строить сечения многогранника.

Задачи работы:

1. Сформировать представление о сечении многогранника.
2. Рассмотреть методы построения сечений многогранника.
3. Научиться изображать пространственные фигуры на плоскости.
4. Рассмотреть конкретные примеры построения сечений многогранника.
5. Научиться строить сечения многогранника.

Объектная область: Математика.

Объект исследования: Стереометрия.

Предмет исследования: Сечения многогранника.

Методы исследования:

1. Поиск информации.
2. Анализ информации.
3. Работа с ПК

Практическая значимость работы: Работа направлена на расширение кругозора подростков 10-11 классов, она будет особенно актуальна для тех, кто собирается работать в области архитектуры, культуры и других областях, где используется сечение.

ГЛАВА 1. ЧТО ТАКОЕ СЕЧЕНИЕ?

Сечение

В пространстве две фигуры (для нашего случая плоскость и многогранник) могут иметь следующее взаимное расположение: не пересекаются, пересекаются в точке, пересекаются по прямой и плоскость пересекает многогранник по его внутренности и при этом образуют следующие фигуры:

- а) пустая фигура (не пересекаются)
- б) точка
- в) отрезок
- г) многоугольник

Если в пересечении многогранника и плоскости есть многоугольник, то этот многоугольник *называется сечением многогранника с плоскостью*.

Сечением пространственного тела (например, многогранника) называется фигура, получающаяся в пересечении тела с плоскостью.

Секущей плоскостью многогранника назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

Будем рассматривать только случай, когда плоскость пересекает многогранник по его внутренности. При этом, пересечением данной плоскости с каждой гранью многогранника будет некоторый отрезок.

Если плоскости пересекаются по прямой, то прямую называют *следом одной из этих плоскостей на другой*.

В общем случае секущая плоскость многогранника пересекает плоскость каждой его грани (а также любую другую секущую плоскость этого многогранника). Она пересекает и каждую из прямых, на которых лежат ребра многогранника.

Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют *следом секущей плоскости* на плоскости этой грани, а точку, в которой секущая плоскость пересекает прямую, содержащую какое – либо ребро многогранника, называют *следом секущей плоскости на этой прямой*. Эта точка является и следом прямой на секущей плоскости. Если секущая плоскость пересекает непосредственно грань многогранника, то можно говорить о следе секущей плоскости на грани, и, аналогично, о *следе секущей плоскости на ребре многогранника*, то есть о следе ребра на секущей плоскости.

Так как прямая однозначно определяется двумя точками, то для нахождения следа секущей плоскости на любой другой плоскости и, в частности, на плоскости любой грани многогранника, достаточно построить две общие точки плоскостей

Для построения следа секущей плоскости, а также для построения сечения многогранника этой плоскостью, должен быть задан не только многогранник, но и секущая плоскость. А построение плоскости сечения проходит в зависимости от задания этой плоскости.

Основными способами задания плоскости, и в частности секущей плоскости, являются следующие:

- тремя точками не лежащих на одной прямой;
- прямой и не лежащей на ней точкой;
- двумя параллельными прямыми;
- двумя пересекающимися прямыми;
- точкой и двумя скрещивающимися прямыми;

Возможны и другие способы задания секущей плоскости.

Поэтому все способы построения сечений многогранников можно разделить на методы.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Метод сечений многогранников в стереометрии используется в задачах на построение. В его основе лежит умение строить сечение многогранника и определять вид сечения.

Существует несколько основных метода построения сечений многогранников:

- Метод следов.
- Метод вспомогательных сечений.
- Комбинированный метод.
- Координатный метод.

Заметим, что метод следов и метод вспомогательных сечений являются разновидностями *Аксиоматического метода построения сечений*.

Можно также выделить следующие методы построения сечений многогранников:

1. построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку параллельно заданной плоскости;
2. построение сечения, проходящего через заданную прямую параллельно, другой заданной прямой;
3. построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно двум заданным скрещивающимся прямым;
4. построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную прямую перпендикулярно заданной плоскости;
5. построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной прямой.

Основными действиями, составляющие методы построения сечений, являются нахождение точки пересечения прямой с плоскостью, построения линии пересечения двух плоскостей, построение прямой параллельной плоскости, перпендикулярной плоскости. Для построения прямой пересечения двух плоскостей обычно находят две ее точки и проводят через них прямую. Для построения точки пересечения прямой и плоскости находят в плоскости прямую, пересекающую данную. Тогда искомая точка получается в пересечении найденной прямой с данной.

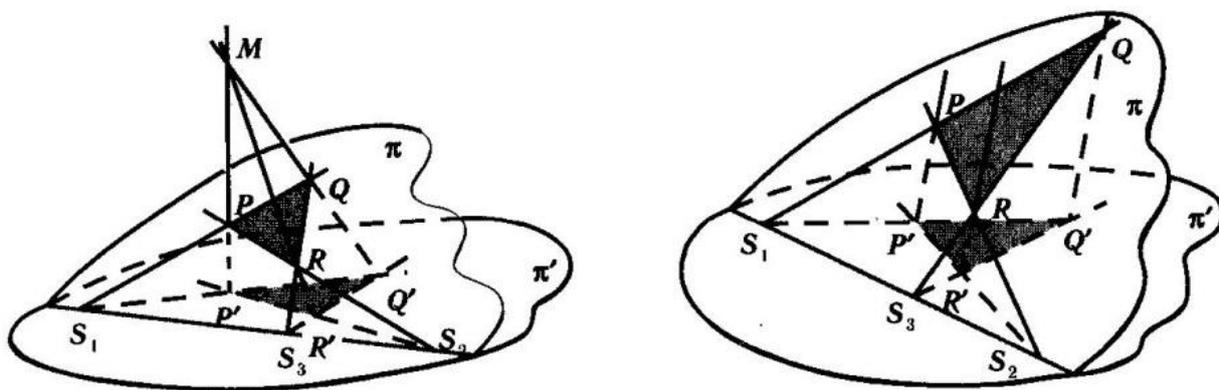
Рассмотрим отдельно перечисленные нами методы построения сечений многогранников:

Метод следов

Метод следов основывается (опирается) на аксиомах стереометрии, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют *основным следом секущей плоскости*. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры. Последовательно соединяя образы этих точек, получим изображение искомого сечения.

Отметим, что при построении основного следа секущей плоскости используется следующее утверждение.

Если точки принадлежат секущей плоскости и не лежат на одной прямой, а их проекция (центральноными или параллельными) на плоскость, выбранную в качестве основной, являются соответственно точки, то точки пересечения соответственных прямых, то есть точки и лежат на одной прямой.



Эта прямая является основным следом секущей плоскости. Так как точки лежат на основном следе, то для его построения достаточно найти две точки из этих трех.

Метод вспомогательных сечений

Этот метод построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скупенными”. Тем не менее, в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

Комбинированный метод

Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Координатный метод построения сечений

Суть координатного метода заключается в вычислении координат точек пересечения ребер или многогранника с секущей плоскостью, которая задается уравнением плоскости. Уравнение плоскости сечения вычисляется на основе условий задачи.

Заметим, что это способ построения сечения многогранника приемлем для компьютера, так как он связан с большим объемом вычислений и поэтому этот метод целесообразно реализовать с помощью ЭВМ.

Наша основная задача будет состоять в построении сечения многогранника с плоскостью, т.е. в построении пересечения этих двух множеств.

ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Прежде всего заметим, что сечение выпуклого многогранника есть выпуклый плоский многоугольник, вершины которого в общем случае являются точками пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, а стороны с его гранями.

Примеры построения сечений:

Пример 1. Метод следов.

На ребрах AA' и $B'C'$ призмы $ABCA'B'C'$ зададим соответственно точку P и Q . Построим сечение призмы плоскостью (PQR) , точку R которой зададим в одной из следующих граней:

- а) $BCC'B'$;
- б) $A'B'C'$;
- в) ABC

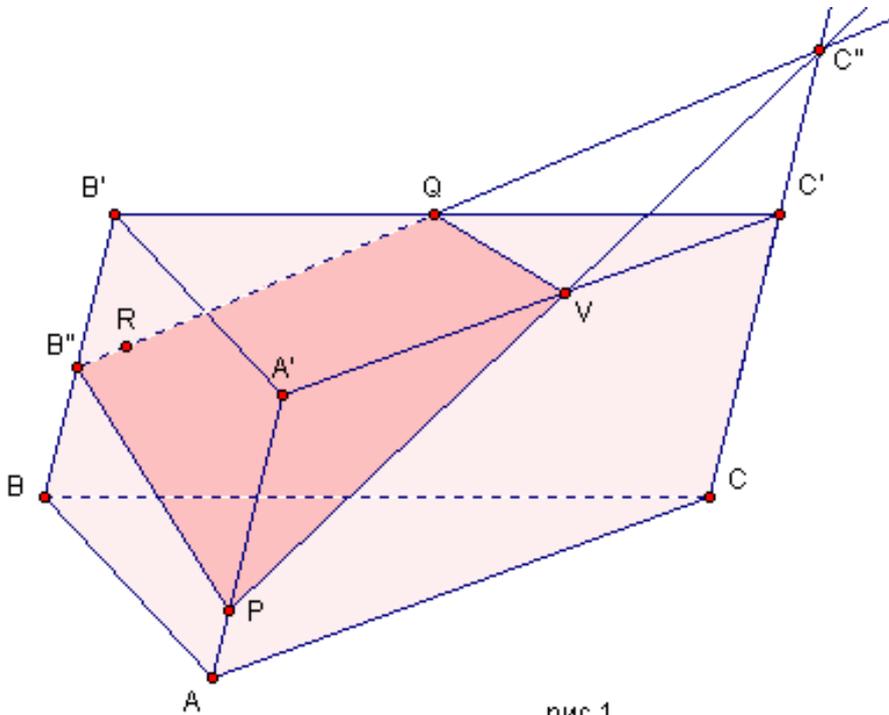


рис.1

Решение:

а)

- 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости (BCC') , то в этой плоскости лежит прямая QR . Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскость (BCC') .
- 2) Находим точки B'' и C' , в которых прямая QR пересекает соответственно прямые BB' и CC' . Точки B'' и C' - это следы плоскости (PQR) соответственно на прямых BB' и CC' .

- 3) Так как точки B'' и P лежат в плоскости (ABB') , то прямая $B''P$ лежит в этой плоскости. Проведем ее. Отрезок $B''P$ - след плоскости (PQR) на грани $ABB'A'$.
- 4) Так как точки P и C лежат в плоскости (ACC') , то прямая PC'' лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC') .
- 5) Находим точку V , в которой прямая PC'' пересекает ребро $A'C'$. Это след плоскости (PQR) на ребре $A'C'$.
- 6) Тачка как точки Q и V лежат в плоскости $(A'B'C')$, то прямая QV лежит в этой плоскости. Проведем прямую QV . Отрезок QV - след плоскости (PQR) на грани ABC . Итак, мы получили многоугольник $QV''PV$ - искомое сечение.

б)

- 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости $(A'B'C')$, то в этой плоскости лежит прямая QR . Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости $(A'B'C')$. (рис.2)
- 2) Находим точки D' и E' , в которых прямая QR пересекает соответственно прямые $A'B'$ и $B'C'$. Так как точка D' лежит на ребре $A'B'$, отрезок QD' - след плоскости (PQR) на грани $A'B'C'$.
- 3) Так как точки D' и P лежат в плоскости (ABB') , то прямая $D'P$ лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ABB') , а отрезок $D'P$ - след плоскости (PQR) на грани $ABB'A'$.
- 4) Так как точки P и E' лежат в плоскости (ACC') , то в этой плоскости лежит прямая PE' . Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC') .
- 5) Находим точку $C''=PE''CC'$. Так как точка C'' лежит на ребре CC' , то отрезок PC'' - это след плоскости (PQR) на грани $ACC'A'$.
- 6) Так как точки Q и C'' лежат в плоскости (BCC') , то прямая QC'' лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC') , а отрезок QC'' - след плоскости (PQR) на грани $BCC'B'$. Итак, мы получили многоугольник $QD'PC''$ - это и есть искомое сечение.

в)

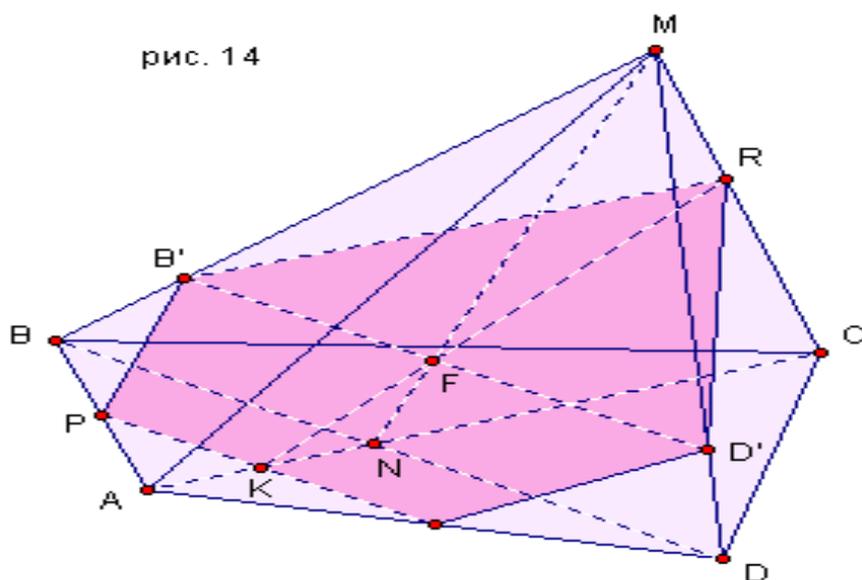
- 1) Из трех заданных точек P , Q и R никакие две не лежат в какой-нибудь одной из плоскостей граней призмы, поэтому найдем основной след плоскости (PQR) (т. е. линию пересечения плоскости (PQR) с плоскостью (ABC) , выбранной в качестве основной). Для этого сначала найдем проекции точек P , Q и R на плоскость (ABC) в направлении, параллельном боковому ребру призмы. Так как точка P лежит на ребре AA' , то точка P' совпадает с точкой A . Так как точка Q лежит в плоскости (BCC') , то в этой плоскости через точку Q проведем прямую, параллельную прямой BB' , и найдем точку Q' , в которой проведенная прямая пересекает прямую BC . Так как точка R по условию лежит в плоскости, выбранной в качестве основной, то точка R' совпадает с точкой R . (Рис.3)
- 2) Параллельными прямыми PP' и QQ' определяется плоскость. Проведем в этой плоскости прямые PQ и $P'Q'$ и найдем точку $S=PQ$ пересекает $P'Q'$. Так как точка S' лежит на прямой PQ , то она лежит в плоскости (PQR) , и так как точка S' лежит на прямой $P'Q'$, то она лежит в плоскости (ABC) . Таким образом, точка S' является общей точкой плоскостей (PQR) и (ABC) . Это

значит, что плоскости (PQR) и (ABC) пересекаются по прямой, проходящей через точку S' .

- 3) Так как точка R совпадает с точкой R' , то точка R - это еще одна общая точка плоскостей (PQR) и (ABC) . Таким образом, прямая $S'R$ - основной след плоскости (PQR) . Проведем эту прямую. Как видим из рисунка, прямая $S'R$ пересекает ребра AB и BC основания призмы соответственно в точках S' и S'' .
- 4) Так как точки S''' и Q лежат в плоскости (BCC') , то прямая $S'''Q$ лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC') . А отрезок $S'''Q$, - след плоскости (PQR) на грани $BCC'B'$.
- 5) Аналогично находим отрезок $S''P$ - след плоскости (PQR) на грани $ABB'A'$.
- 6) Находим далее точку $S''' = S''Q \cap CC'$. Так как точки S''' и Q лежат в плоскости (BCC') , то прямая $S'''Q$ лежит в плоскости (BCC') . Проведем эту прямую, являющуюся следом плоскости (PQR) на плоскости (BCC') .
- 7) Находим точку $F = S'''P \cap A'C'$ и получаем затем отрезок PF - след плоскости (PQR) на грани $ACC'A'$.
- 8) Точки Q и F лежат в плоскости $A'B'C'$, поэтому прямая QF лежит в плоскости $(A'B'C')$. Проведем прямую QF , получим отрезок QF - след плоскости (PQR) на грани $A'B'C'$. Итак, мы получили многоугольник $QS'''S''PF$ - искомое сечение.

Пример №2. Комбинированный метод построения сечений

На ребрах AB и AD пирамиды $MABCD$ зададим соответственно точки P и Q - середины этих ребер, а на ребре MC зададим точку R . Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки P , Q и R .

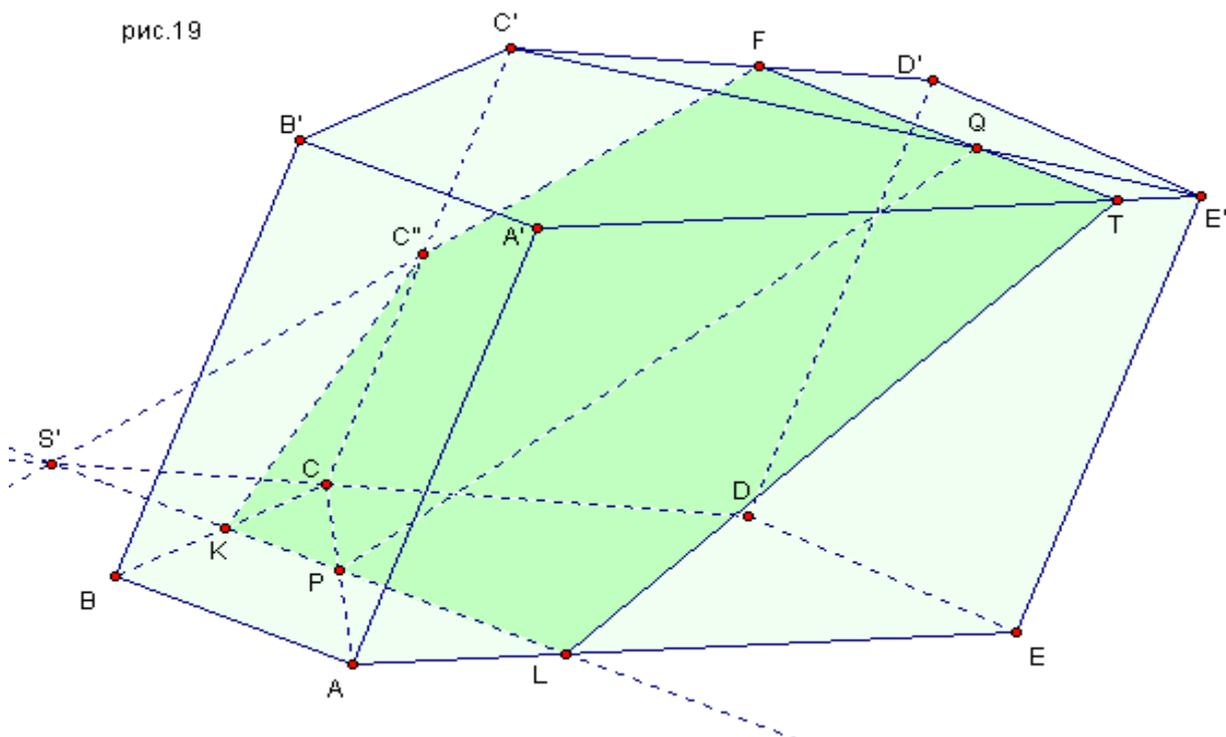


Решение:

- 1) Ясно, что основным следом плоскости PQR является прямая PQ.
- 2) Найдем точку K, в которой плоскость MAC пересекает прямую PQ. Точки K и R принадлежат и плоскости PQR, и плоскости MAC. Поэтому, проведя прямую KR, мы получим линию пересечения этих плоскостей.
- 3) Найдем точку $N=AC \cap BD$, проведем прямую MN и найдем точку $F=KR \cap MN$.
- 4) Точка F является общей точкой плоскостей PQR и MDB, то есть эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку F. Вместе с тем так как PQ - средняя линия треугольника ABD, то PQ параллельна BD, то есть прямая PQ параллельна и плоскости MDB. Тогда плоскость PQR, проходящая через прямую PQ, пересекает плоскость MDB по прямой, параллельной прямой PQ, то есть параллельной и прямой BD. Поэтому в плоскости MDB через точку F проведем прямую, параллельную прямой BD.
- 5) Дальнейшие построения понятны из рисунка. В итоге получаем многоугольник PQD'RB' - искомое сечение.

Пример 3.

На диагоналях AC и C'E' оснований призмы ABCDEA'B'C'D'E' зададим соответственно точки P и Q. Построим сечение призмы плоскостью альфа, проходящей через прямую PQ параллельно одной из следующих прямых: а). AB; б). AC'; в). BC'

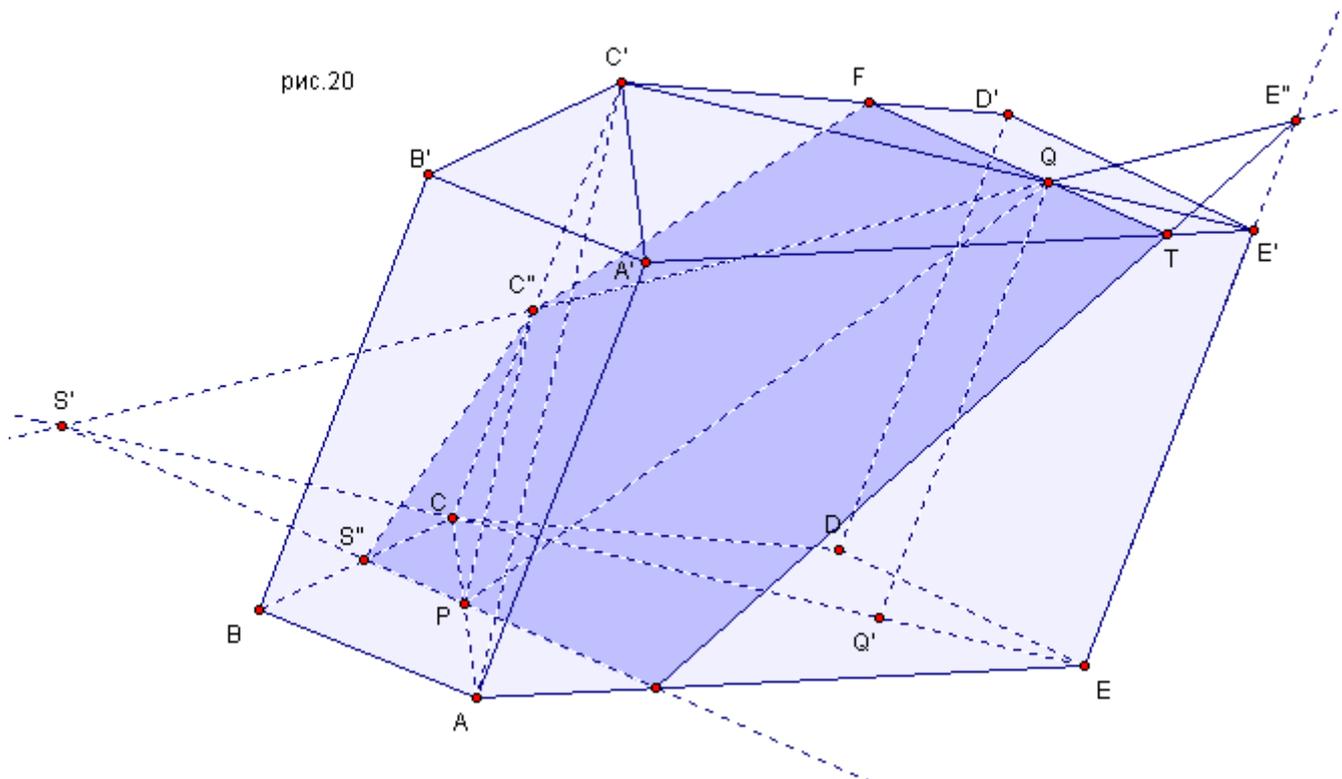


Решение:

а)

- 1) (рисунок Плоскость, проходящая через прямую АВ - вторую заданную прямую и точку Р, взятую на первой прямой, уже построена. Это плоскость АВС.
- 2) В плоскости АВС через точку Р проведем прямую, параллельно прямой АВ, и найдем точки К и L, в которых эта прямая пересекает соответственно прямые ВС и АЕ.
- 3) Пересекающимися прямыми PQ и KL определяется плоскость альфа (плоскость KЛQ) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение, воспользовавшись, в частности, параллельностью оснований призмы. 4). Ясно, что прямая KL является основным следом плоскости альфа. Т. к. плоскости призмы параллельны между собой, то линии пересечения секущей плоскости альфа с плоскостями АВС и А'В'С' также параллельны между собой. Принимая во внимание, что KL параллельна АВ и А'В' параллельна АВ, проведем в плоскости А'В'С' через точку Q прямую, параллельную прямой А'В', и найдем точки F и Т, в которых эта прямая пересекает соответственно прямые С'D' и А'Е'. Далее получаем отрезок TL - след плоскости альфа на грани АЕЕ'А', точку S'=KL CD, прямую S'F - след плоскости альфа на плоскости CDD', отрезок FC'' - след плоскости альфа на грани CDD'С' и, наконец, отрезок С''К - след плоскости альфа на грани ВСС'В'. В итоге получаем многоугольник KLTFC'' - искомое сечение.

б)



- 1) Проведем плоскость через прямую AC' - вторую заданную прямую, и точку P , взятую на первой прямой. Это плоскость ACC' .
- 2) В плоскости ACC' через точку P проведем прямую, параллельную прямой AC' , и найдем точку C'' , в которой эта прямая пересекает прямую CC' .
- 3) Пересекающимися прямыми PQ и PC'' определяется плоскость альфа (плоскость $C''PQ$) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение, например, методом следов. Одна точка, принадлежащая следу плоскости альфа на плоскость ABC , которую мы принимаем за основную, на чертеже уже есть. Это точка P . Найдем еще одну точку этого следа.
- 4) Проекция точки C'' на плоскость ABC является точка C , а проекцией точки Q - точка Q' - точка пересечения прямой CE с прямой, проходящей в плоскости $C'E'E'$ через точку Q параллельно прямой $E'E'$. Точка $S' = C''Q \cap CQ'$ - это вторая точка основного следа плоскости альфа. Итак, основным следом плоскости альфа является прямая $S'P$. Она пересекает стороны BC и AE основания призмы соответственно в точках S'' и S''' . Тогда отрезок $S''S'''$ - след секущей плоскости альфа на грани $ABCDE$. А отрезок $S''C''$ - след плоскости альфа на грани $BCC'B'$. Нетрудно увидеть, что прямые $C''Q$ и $E'E'$ лежат в одной плоскости. Найдем точку $E'' = C''Q \cap E'E'$. Тогда ясно получение дальнейших следов плоскости альфа: $S''S'''$, $S''T$, TF и FC'' . В итоге получаем многоугольник $S''S'''TFC''$ - искомое сечение.

в)

- 1) (рисунок) Через вторую заданную прямую - прямую BC' - и, например, через точку P , лежащую на первой заданной прямой, поведем плоскость. Сделаем это методом следов. Легко устанавливается, что основным следом этой плоскости $BC'P$ является прямая BP . Затем находим точку $S' = BP \cap CD$ и след $S'C'$ плоскости $BC'P$ и плоскости CDD' .

- 2) В плоскости $BC'P$ через точку P проведем прямую, параллельную прямой BC' . Точку пересечения проведенной прямой с прямой $S'C'$ обозначим V .
- 3) Пересекающимися прямыми PQ и PV определяется плоскость альфа (плоскость PQV) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение.
- 4) Находим точки Q' и V' - проекции соответственно точек Q и V на плоскость ABC , принимаемую нами за основную плоскость. Затем находим точку $S''=QV \cap Q'V'$. Это одна из точек основного следа плоскости альфа. И еще одна точка этого следа уже есть. Это заданная точка P . Итак, прямая $S''P$ - основной след плоскости альфа, а полученный при этом отрезок $S''S'''$ - след плоскости альфа на грани $ABCDE$. Дальнейший ход построения ясен: $S''''=S''P \cap CD$, $S''''V$, точки $C''=S''''V \cap CC'$ и $F=S''''V \cap C'D'$, затем FQ и точка $T=FQ \cap A'E'$ и, наконец, TS'''' . В итоге получаем многоугольник $S''C''FTS''''$ - искомое сечение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы я рассмотрела методы построения сечений многогранника на конкретных примерах, научилась изображать пространственные фигуры на плоскости.

Я считаю, что достигла своей цели, научилась строить сечения в многограннике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) <https://pandia.ru/text/78/375/1565.php>
- 2) <https://infourok.ru/metodi-postroeniya-secheniy-mnogogrannikov-2430443.html>
- 3) <https://studfiles.net/preview/3053287/page:9/>
- 4) <https://www.kazedu.kz/referat/111323/3>