ОТДЕЛ ОБРАЗОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПО СОЦИАЛЬНО-КУЛЬТУРНЫМ ВОПРОСАМ АДМИНИСТРАЦИИ

Г. УСОЛЬЕ-СИБИРСКОЕ

МУНИЦПАЛЬНОЕ КАЗЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«ИНФОРМАИОННЫЙ МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

XIX ГОРОДСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФРЕНЦИЯ «СЕРЕБРЯНЫЙ РОСТОК»

Тема «АЛИКВОТНЫЕ ДРОБИ»

Уровень: Исследовательский

Вид: научно - исследовательский

Авторы:

Байков Марк Юрьевич,

ученица 7А класса

Руководитель:

Мамедова Ольга Владимировна,

учитель математики

МБОУ «Гимназия №1»

г. Усолье-Сибирское

2022 г.

Содержание:

Введение.

В этом году я начал изучать алгебру и в учебнике было задание, где я столкнулся с новым понятием – «Аликвотные дроби». Это название меня очень сильно заинтересовало, поэтому я решил познакомиться с историей аликвотных дробей, как они использовались при решении задач, какими известными свойствами чисел обладают эти дроби.

Я выдвинул **гипотезу**: что я знаю об аликвотных дробях и где они используются?

Цель работы: какое значение имеют аликвотные дроби в нашей жизни и их применение при решении задач.

Задачи :

1. Изучить историю аликвотных дробей;
2. Изучить основные свойства аликвотных дробей;
3. Решать задачи с помощью аликвотных дробей.

Объект исследования– аликвотные дроби.

Предмет исследования – основные свойства аликвотных дробей.

Актуальность темы:

Использование аликвотных дробей, позволяет решать сложные олимпиадные задачи по математике более рациональными способами и расширяет знания по истории развития математики.

Методы исследования: сбор информации, анкетирование, анализ.

2.Теоретическая часть.

2.1. История аликвотных чисел.

Аликвота - (лат. aliquoties, «несколько раз; несколько частей»).

Аликвотная дробь - дробь, числитель которой равен единице.

Аликвотные дроби начали использоваться ещё в древности. Необходимость в дробных числах возникла в результате практической деятельности человека. Потребность в нахождении долей единицы появилась у наших предков при дележе добычи после охоты. Второй существенной причиной появления дробных чисел следует считать измерение величин при помощи выбранной единицы измерения.

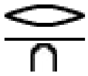
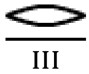
Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это так называемые **единичные** дроби, так как числитель этих дробей единица. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Это нужно было для того:

1. чтобы *разделить добычу после охоты*, ведь, нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.
2. выразить *результат измерения* длины, времени, площади, массы и вести расчеты за товары.

2.2. Аликвотные дроби в Древнем Египте.

Египетские дроби были изобретены и впервые использованы в Древнем Египте. Одним из первых известных упоминаний о египетских дробях является Математический папирус Ринда. Три более древних текста, в которых упоминаются египетские дроби — это Египетский математический кожаный свиток, Московский математический папирус и Деревянная табличка Ахмима. Папирус Ринда был написан писцом Ахмесом в эпоху Второго переходного периода; он включает таблицу египетских дробей для рациональных чисел вида $\frac{2}{n}$, а также 84 математических задачи, их решения и ответы, записанные в виде египетских дробей.

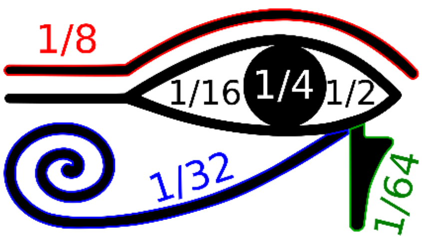
Египтяне ставили иероглиф  над числом для обозначения единичной дроби в обычной записи, а в священных текстах использовали линию. К примеру:

 $= \frac{1}{10}$  $= \frac{1}{3}$

У них также были специальные символы для дробей $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ (последние два знака — единственные используемые египтянами дроби, не являющиеся аликвотными), которыми можно было записывать также другие дроби (большие чем $\frac{1}{2}$).

 $= \frac{1}{2}$;  $= \frac{2}{3}$;  $= \frac{3}{4}$.

Одним из ярких примеров использования в Древнем Египте аликвотных дробей является глаз Хора – единица измерения ёмкостей и объёмов, которая представляла собой дробь $\frac{63}{64}$. Согласно мифам глаз Хора был выбит, а затем восстановлен на $\frac{63}{64}$. Каждая часть глаза соответствовала определённой дроби и была представлена в виде суммы аликвотных дробей таким образом:

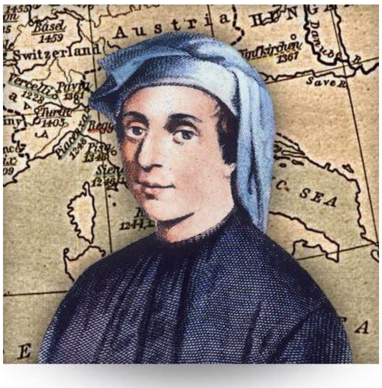


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

Такие дроби использовались вместе с другими формами записи египетских дробей для того, чтобы поделить хекат (~4,785 литра), основную меру объёма в Древнем Египте. Эта комбинированная запись также использовалась для измерения объёма зерна, хлеба и пива. Если после записи количества в виде дроби Глаза Хора оставался какой-то остаток, его записывали в обычном виде кратно *ро*, единице измерения, равной 1/320 хеката.

2.3. Аликвотные дроби в других странах.

Египетские дроби продолжали использоваться в древней Греции и впоследствии математиками всего мира до средних веков, несмотря на имеющиеся к ним



замечания древних математиков (к примеру, Клавдий Птолемей говорил о неудобстве использования египетских дробей по сравнению с Вавилонской системой).

Важную работу по исследованию египетских дробей провёл математик XIII века Фибоначчи в своём труде «Liber Abaci». Основная тема «Liber Abaci» — вычисления, использующие десятичные и обычные дроби, вытеснившие со временем египетские дроби. Фибоначчи использовал сложную запись дробей, включавшую запись чисел со смешанным основанием и запись в виде сумм дробей, часто использовались и египетские дроби. Также в книге были приведены алгоритмы перевода из обычных дробей в египетские.

Первый дошедший до нас общий метод разложения произвольной дроби на египетские составляющие описал Фибоначчи в XIII веке. В современной записи его алгоритм можно изложить следующим образом.

1. Дробь $\frac{m}{n}$ разлагается на два слагаемых: $\frac{m}{n} = \frac{1}{[n/m]} + \frac{m[n/m]-n}{n[n/m]}$

Здесь $[n/m]$— частное от деления n на m, округлённое до целого в большую сторону, а $m[n/m] - n$ — (положительный) остаток от деления $-n$ на m.

2. Первое слагаемое в правой части уже имеет вид египетской дроби. Из формулы видно, что числитель второго слагаемого строго меньше, чем у исходной дроби. Аналогично, по той же формуле, разложим второе слагаемое и продолжим этот процесс, пока не получим слагаемое с числителем 1.

Метод Фибоначчи всегда сходится после конечного числа шагов и даёт искомое разложение. Пример:

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Однако полученное таким методом разложение может оказаться не самым коротким. Пример его неудачного применения:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

в то время как более совершенные алгоритмы приводят к разложению:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

3. Аликвотные дроби на практике.

3.1. Разложение обыкновенных дробей на аликвотные .

1. *Рассмотрим формулы, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы двух аликвотных дробей.*

1) $\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 10} + \frac{1}{2\cdot 10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$

2) $\frac{1}{a} = \frac{1(a+1)}{a(a+1)} = \frac{a}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{10+1} + \frac{1}{10(10+1)} = \frac{1}{11} + \frac{1}{10\cdot 11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110}$

3) $\frac{1}{ab} = \frac{1(a+1)}{ab(a+1)} = \frac{a}{ab(a+1)} + \frac{1}{ab(a+1)} = \frac{1}{b(a+1)} + \frac{1}{ab(a+1)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{5\cdot(2+1)} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot(2+1)} = \frac{1}{5\cdot 3} + \frac{1}{10\cdot 3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$

Поменяв местами *a* и *b* в формуле (3), получим следующие формулы:

4) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{ab(b+1)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot(5+1)} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot(5+1)} = \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{60}$

5) $\frac{1}{ab} = \frac{a+b}{ab(a+b)} = \frac{a}{ab(a+b)} + \frac{b}{ab(a+b)} = \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(a+b)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{5\cdot(2+5)} + \frac{1}{2\cdot(2+5)} = \frac{1}{35} + \frac{1}{14}$

2. *Рассмотрим формулы, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы трёх аликвотных дробей.*

6) $\frac{1}{a} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{3\cdot 10} + \frac{1}{3\cdot 10} + \frac{1}{3\cdot 10} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}$

7) $\frac{1}{a} = \frac{1(2a+1)}{a(2a+1)} = \frac{a}{a(2a+1)} + \frac{a}{a(2a+1)} + \frac{1}{a(2a+1)} = \frac{1}{2a+1} +$

$+ \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{a(2a+1)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 10+1} + \frac{1}{2\cdot 10+1} + \frac{1}{10\cdot(2\cdot 10+1)} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{210}$

8) $\frac{1}{ab} = \frac{1(a+b+1)}{ab(a+b+1)} = \frac{a}{ab(a+b+1)} + \frac{b}{ab(a+b+1)} +$

$+\frac{1}{ab(a+b+1)} = \frac{1}{b(a+b+1)} + \frac{1}{a(a+b+1)} + \frac{1}{ab(a+b+1)}$

Например: $\frac{1}{10} = \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{5\cdot(2+5+1)} + \frac{1}{2\cdot(2+5+1)} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot(2+5+1)} =$

$= \frac{1}{40} + \frac{1}{16} + \frac{1}{80}$

9) $\frac{1}{abc} = \frac{1(a+b+c)}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ac(a+b+c)} + \frac{1}{ab(a+b+c)}$

Например: $\frac{1}{42} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot(2+3+7)} + \frac{1}{3\cdot 7\cdot(2+3+7)} + \frac{1}{2\cdot 7\cdot(2+3+7)} =$

$= \frac{1}{72} + \frac{1}{252} + \frac{1}{168}$

3.*Рассмотрим разложение правильной несократимой дроби в сумму различных аликвотных дробей.*

а) Нужно умножить числитель и знаменатель дроби на такое число, чтобы числитель получившейся дроби можно было разложить на слагаемые, каждый из которых будет являться делителем знаменателя. При решении таких заданий я выяснил, что в большинстве случае такое число является 6.

Например:

1) $\frac{5}{13} = \frac{5\cdot 6}{13\cdot 6} = \frac{30}{78} = \frac{13}{78} + \frac{6}{78} + \frac{2}{78} + \frac{3}{78} + \frac{6}{78} = \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{39} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13}$

2) $\frac{4}{19} = \frac{4\cdot 6}{19\cdot 6} = \frac{24}{114} = \frac{19}{114} + \frac{2}{114} + \frac{3}{114} = \frac{1}{6} + \frac{1}{57} + \frac{1}{38}$

б) Числитель можно представить в виде суммы делителей знаменателя.

Например:

1) $\frac{13}{48} = \frac{6}{48} + \frac{4}{48} + \frac{3}{48} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}$

2) $\frac{13}{48} = \frac{12}{48} + \frac{1}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{48}$

в) Числитель можно разложить на сумму чисел, среди которых есть как делители знаменателя, так и числа не являющиеся таковыми.

1) $\frac{5}{27} = \frac{3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9} + \frac{2\cdot 6}{27\cdot 6} = \frac{1}{9} + \frac{12}{162} = \frac{1}{9} + \frac{9}{162} + \frac{3}{162} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$

2) $\frac{5}{21} = \frac{3}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2\cdot 6}{21\cdot 6} = \frac{1}{7} + \frac{12}{126} = \frac{1}{7} + \frac{9}{126} + \frac{3}{126} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

3.2. Решение задач с аликвотными дробями.

Задачи на аликвотные дроби составляют обширный класс нестандартных задач, для решения которых нужно проявить не только сообразительность и смекалку, но и прочные знания о свойствах таких дробей. В этом разделе я рассмотрел задачи, которые встречаются на олимпиадах и экзаменах. При решении задач я использовал формулы, которые разобраны в п.3.1.

1) Вычислить сумму:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2450}.$$

Решение: Представим каждую дробь, используя формулу

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2450} = \frac{1}{49\cdot 50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}.$$

Ответ: $\frac{49}{50}$.

2) Вычислить сумму:

$$S = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \cdots \frac{2}{99\cdot 101}.$$

Решение:

$$S = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \cdots \frac{2}{99\cdot 101} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{99} -$$

$$- \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Ответ: $\frac{100}{101}$

3) Вычислить сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Решение:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Ответ: $\frac{n}{n+1}$.

4) Представить число 1 в виде суммы различных аликвотных дробей:

а) с помощью трёх слагаемых.

Решение:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\cdot(2+1)}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

б) четырёх слагаемых.

Решение:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6\cdot(6+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}++\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

в) пяти слагаемых.

Решение:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\cdot(3+1)}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

г) шести слагаемых.

Решение:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}++\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}++\frac{1}{42}+\frac{1}{56}.$$

5) Найти все натуральные числа a и b, такие что:

a) $\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; b) $\frac{1}{3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; c) $\frac{1}{6}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Решение:

a) $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ (1)

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\cdot(2+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (2)

Ответ: $\{4;4\}$; $\{3;6\}$

b) $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ (1)

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\cdot(3+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ (2)

Ответ: $\{6;6\}$; $\{4;12\}$

c) $\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ (1)

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2\cdot(2+3)}+\frac{1}{3\cdot(2+3)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ (5)

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2\cdot(3+1)}+\frac{1}{2\cdot3\cdot(3+1)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$ (4)

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{3\cdot(2+1)}+\frac{1}{2\cdot3\cdot(2+1)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$ (3)

$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6\cdot(6+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ (2)

Ответ: $\{12;12\}$; $\{10;15\}$; $\{8;14\}$; $\{9;18\}$; $\{7;42\}$

6) Найдите все возможные наборы чисел a, b и c, среди которых есть равные и верно равенство:

а) $\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; б) $\frac{1}{3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Решение:

а) Представим дробь $\frac{1}{2}$ различными способами:

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ (6)

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cdot2+1}+\frac{1}{2\cdot2+1}+\frac{1}{2\cdot(2\cdot2+1)}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ (7)

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} \qquad (1),(2)$$

Ответ: $\{6;6;6\}$; $\{5;5;10\}$; $\{4;8;8\}$; $\{3;12;12\}$.

б) Представим дробь $\frac{1}{3}$ различными способами:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3+1}+\frac{1}{2\cdot 3+1}+\frac{1}{3\cdot(2\cdot 3+1)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24} \qquad (1),(2)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12} \qquad (1),(2)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{5}{15}=\frac{3}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}.$$

Ответ: $\{9;9;9\}$; $\{7;7;21\}$; $\{6;12;12\}$; $\{4;24;24\}$; $\{8;8;12\}$; $\{5;15;15\}$

7) Четыре натуральных числа a,b,c и d таковы что

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

а) Могут ли все эти числа быть попарно различны?

Решение: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

Ответ: Да.

б) Может ли одно из этих чисел равняться 7?

Решение:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6\cdot(6+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}++\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

Ответ: Да .

в) Найдите все возможные наборы таких чисел среди которых ровно два числа равны.

Решение:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}.$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}.$$

Ответ: {3; 3; 4; 12}; {2; 5; 5; 10}; {3; 6; 4; 4}; {2; 3; 12; 12}; {2; 4; 8; 8}

8) Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$, где $m>n$.

Решение: Знаменатель исходной дроби составное число, то количество возможных вариантов замены исходной аликвотной дроби суммой двух аликвотных дробей равно числу пар взаимно простых делителей знаменателя исходной дроби. Для решения данного уравнения я использовал формулы (2) и (3).

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{25\cdot 1}=\frac{1}{25+1}+\frac{1}{25\cdot(25+1)}=\frac{1}{26}+\frac{1}{650};$$

$$\frac{1}{25}=\frac{1}{5\cdot 5}=\frac{1}{5\cdot(5+1)}+\frac{1}{5\cdot 5\cdot(5+1)}=\frac{1}{30}+\frac{1}{150}.$$

Ответ: m = 150,n = 30 или m = 650, n = 26.

9) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

Решение: 1) $\frac{33}{100}=\frac{25}{100}+\frac{4}{100}+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{1}{100}=\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{50}+(\frac{1}{101}+\frac{1}{100\cdot 101})=\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{50}+\frac{1}{101}+\frac{1}{10100};$

2) $\frac{33}{100}=\frac{20}{100}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}+\frac{1}{100}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100.}$

10) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

Решение: 1) $\frac{15}{91} = \frac{15\cdot6}{91\cdot6} = \frac{90}{546} = \frac{21}{546} + \frac{14}{546} + \frac{39}{546} + \frac{13}{546} + \frac{3}{546} = \frac{1}{26} + \frac{1}{39} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{182}$;

2) $\frac{15}{91} = \frac{15\cdot10}{91\cdot10} = \frac{150}{910} = \frac{70}{910} + \frac{65}{910} + \frac{10}{910} + \frac{5}{910} = \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182}$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Представьте в виде суммы различных аликвотных дробей следующую дробь: а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{10}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{5}{6}$.

2. Вычислить:

а) $\frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7}$;

б) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{2017\cdot2018}$;

в) $\frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \cdots + \frac{1}{9900}$;

г) $\frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \cdots + \frac{1}{32\cdot35}$;

д) $\frac{7}{8} + \frac{7}{8\cdot15} + \frac{7}{15\cdot22} + \frac{1}{22\cdot29} + \cdots + \frac{1}{2010\cdot2017}$.

3. Запишите дроби $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{11}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ в виде суммы аликвотных дробей с различными знаменателями.

4. Четыре натуральных числа a, b, c, d таковы, что

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?

в) Найдите все возможные наборы чисел (без учета их порядка в наборе), среди которых ровно два числа равны.

5. Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \le n$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$.

4. **Заключение.**

Заключение

Надеюсь, что рассмотренные в работе задачи и примеры убеждают нас в том, что самые «древние» дроби, с которыми столкнулось человечество, до сих пор не утратили своей значимости. С помощью аликвотных дробей многие «трудно решаемые» задачи становятся интересными, доступными и занимательными. Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач, решая которые можно совершенствовать вычислительный аппарат и повышать математическую культуру.

Их использование развивает нестандартное мышление и даёт возможность решения некоторых практических задач оригинальным способом.

В школьном курсе математики аликвотные дроби не изучаются, но, встречаются на олимпиадах и на экзаменах.

5. **Список литературы**

1. Фарков А. В. «Математические олимпиады в школе». 5-11класс. – М.: Айрис-пресс, 2005.
2. Левитас Г. Г. « Нестандартные задачи по математике».– М.: ИЛЕКСА,2007.
3. Гаврилова Т. Д. «Занимательная математика». 5-11класс. -Волгоград: Учитель, 2008.
4. Галкин Е. В. «Нестандартные задачи по математике». 7-11 класс. -Челябинск. Взгляд, 2004 год.
5. Фомин А. А., Кузнецова Г. М. «Международные математические олимпиады». -М.: ДРОФА, 2006 год.
6. http://ru.wikipedia.org/wiki Симметрия - http://slovari.yandex.ru
7. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/436051/Egipetskie_drobi
8. https://imit-omsu.livejournal.com/162456.html
9. https://www.e-osnova.ru/PDF/osnova_3_40_7874.pdf