Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
«Гимназия № 1»

Научно-практическая конференция
«СТУПЕНИ»

«Диофантовы уравнения»

Автор: Агаева Сабина,
11 А класс.

Руководитель: Мамедова Ольга Владимировна,
учитель математики,
первая квалификационная категория

г. Усолье-Сибирское
2019 г.

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ

Окружающий мир, потребности народного хозяйства, а зачастую, и повседневные хлопоты ставят перед человеком все новые и новые задачи, решение которых не всегда очевидно. Порою тот или иной вопрос имеет под собой множество вариантов ответа, из-за чего происходят затруднения в решении поставленных задач. Как выбрать правильный и оптимальный вариант?

С этим же вопросом напрямую связано решение неопределенных уравнений. Такие уравнения, содержащие две или более переменных, для которых требуется найти все целые или натуральные решения, рассматривались еще в глубокой древности. Уравнениями в целых числах много занимался древнегреческий математик Диофант Александрийский. Он изобрел много разных способов решения подобных уравнений.

Актуальность исследования заключается в том, что в школьном курсе математики диофантовы уравнения не изучаются, но, например, в заданиях № 19 в ЕГЭ встречаются диофантовы уравнения, также диофантовы уравнения часто встречаются и в олимпиадных задачах. Значит, ученику для успешной сдачи ЕГЭ и решения олимпиадных задач нужно знать и теорию и методику решения диофантовых уравнений.

Гипотеза: Диофантовы уравнения – сложные уравнения, решение которых требует особой математической подготовки.

Объект исследования - решение диофантовых уравнений.

Предмет исследования – диофантовы уравнения.

Цель исследования – изучить некоторые способы решения диофантовых (неопределенных) уравнений.

Задачи исследования:

1. изучить способы решения диофантовых уравнений;
2. повысить уровень математической культуры, прививая навыки самостоятельной исследовательской работы в математике;

3. показать практическое применение неопределенных уравнений.

2. *Историческая справка*

Диофантовы уравнения – алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях больше числа уравнений. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями.

Диофантовы уравнения связаны с именем древнегреческого математика Диофанта Александрийского.

Диофант представляет одну из наиболее трудных загадок в истории науки. Нам не известно ни время, когда он жил, ни предшественники, которые работали бы в той же области. Труды его подобны сверкающему огню среди непроницаемой тьмы.

Промежуток времени, когда мог жить Диофант, составляют полтысячелетия! Нижняя грань определяется без труда: в своей книге о многоугольных числах Диофант неоднократно упоминает математика Гипсикла Александрийского который жил в середине 2-ого в. до н.э.

С другой стороны, в комментариях Теона Александрийского к «Альмагесту» знаменитого астронома Птолемея помещен отрывок из сочинения Диофанта. Теон жил в середине 4-ого в.н.э. Этим определяется верхняя грань этого промежутка. Итак, 500 лет!

Французский историк науки Поль Таннри, издатель наиболее полного текста Диофанта, попытался сузить этот промежуток В библиотеке Эскуриала он нашел отрывки из письма Михаила Пселла, византийского ученого Х1 в., где говорится, что ученейший Анатолий после того как собрал наиболее существенные части этой науки речь идет о введении степеней неизвестного и об их (обозначении), посвятил их своему другу Диофанту. Анатолий Александрийский действительно составил «Введение в арифметику», отрывки которой приводят в дошедшей до нас сочинений Ямблих и Евсений. Но Анатолий жил в Александрии в середине 111-го в до н. э и даже более точно – до 270 года, когда он стал епископом Лаодакийским. Значит, его дружба с Диофантом, которого все называют Александрийским, должна была иметь место до этого. Итак, если знаменитый Александрийский математик и друг Анатолия по имени Диофант составляют одно лицо, то время жизни Диофанта - середина 111-го века нашей эры.

Зато место жительства Диофанта хорошо известно – Александрия, центр научной мысли и эллинистического мира.

Диофант прожил 84 года.

Наиболее загадочным представляется творчество Диофанта. До нас дошло шесть из тринадцати книг, которые были объединены в «Арифметику», стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебры, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, его «Данным», леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, которые остались совершенно неизвестными.

Мы можем только гадать о её корнях, и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика» Диофанта это сборник задач (всего 189), каждая из которых снабжена решением. Задачи в ней тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определенных, строго продуманных методах. Как это было принято в древности, методы не формулируются в общем виде, а повторяются для решения однотипных задач.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ I-ОЙ СТЕПЕНИ ВИДА $ax + by = c$.

Уравнение вида $ax + by = c$ является одним из простейших неопределенных уравнений I-ой степени, но не смотря на это, решить такое уравнение весьма не просто. Можно выделить два метода решения неопределенных уравнений вида $ax + by = c$: метод перебора и метод «спуска».

1.Метод перебора. Метод перебора включает в себя перебор чисел вместо переменных x и y, с учетом, что уравнение при определенном подборе чисел обращается в верное равенство.

Пример 1: Найти все натуральные значения переменных *x и y* уравнения $4{,}5x + 6y = 57$.

Решение: Умножим обе части уравнения на 2, чтобы избавиться от дробных чисел, получим: $9x + 12y = 114$.

Выразим y чрез x: $y = \dfrac{144 - 9x}{12}$

Далее воспользуемся методом перебора (учитывая, что $x \in$ N и $y \in$ N):

x	2	10
y	8	2

Таким образом, подставляя вместо x числа, удовлетворяющие равенству, получили некоторые значения y (причем $x \in$ N и $y \in$ N).

Ответ: (2;8), (10;2).

Пример 2: В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других?

Решение:

Составляется уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором x – число кроликов. y – число фазанов:

$4x + 2y = 18$, или $2x + y = 9$.

Выразим y через x: $y = 9 – 2x$.

Далее воспользуемся методом перебора:

x	1	2	3	4
y	7	5	3	1

Таким образом, задача имеет четыре решения.

Ответ: (1; 7), (2; 5), (3; 3), (4; 1).

2.Метод «спуска». Перебор вариантов при решении уравнения в целых числах часто оказывается весьма трудоемким. Поэтому рассмотрим еще один старинный прием – метод «спуска» (или метод рассеивания). Таким методом решения неопределенных (диофантовых) уравнений I-ой степени с целыми коэффициентами занимались еще в Древней Индии. Этим способом и в наше время решают такие уравнения.

Но всегда ли возможно решить уравнение вида $ax + by = c$ в целых числах? Можно рассмотреть три случая:

1). Если свободный член с неопределенного уравнения $ax + by = c$ *не делится на НОД (a, b), то уравнение не имеет целых корней.*

2). Если коэффициенты a, b являются взаимнопростыми числами, то уравнение имеет, по крайней мере, одно целое решение.

3). Неопределенное уравнение $ax + by = c$*, в котором a, b – взаимнопростые числа допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами:* $x = \lambda + bt$ $\quad y = \beta - at$*, где* (λ, β) *– некоторые решения уравнения, at - принадлежит множеству целых чисел.*

Пример 1: Найти все целые решения уравнения.

$$19x - 8y = 13 \qquad (1).$$

Решение: Выражая y – неизвестное с наименьшим по модулю коэффициентом через x получим: $y = \frac{19x - 13}{8}$ (2).

Теперь нам нужно выяснить, при каких целых значениях x соответствующие значения y также являются целыми числами. То есть, выделив целую часть, запишем уравнение (2) следующим образом: $y = 2x + \frac{3x - 13}{8}$ (3). Из уравнения (3) следует, что y при целом значении x будет иметь целое значение только в том случае, если выражение $\frac{3x - 13}{8}$ также будет иметь целое значение, заменим это выражение на z $(z \in \mathbb{Z})$.

Значит $\frac{3x - 13}{8} = z$ (4), сведем к решению уравнения (4) с двумя неизвестными x и z, тогда его можно записать так: $3x - 8z = 13$ (5).

Продолжая тем же способом, из уравнения (5) получим:

$$x = \frac{8z + 13}{3} = 2z + \frac{2z + 13}{3} \qquad (6).$$

Получается, неизвестное x принимает целое значение при целом z тогда, когда $\frac{2z+13}{3}$ будет принимать целое значение. Пусть это выражение равно p ($p \in \mathrm{Z}$), получим:

$$p = \frac{2z+13}{3} \quad (7) \qquad \text{или} \quad 3p - 2z = 13 \quad (8).$$

Далее: $$z = \frac{3p-13}{2} = p + \frac{p-13}{2} \quad (9).$$

Аналогично (4) и (7) $\frac{p-13}{2}$ должно быть целым числом, подставим вместо этого выражения q ($q \in \mathrm{Z}$), получаем: $q = \frac{p-13}{2}$ (10),

преобразуем $p - 2q = 13$ (11).

Из уравнения (11) получаем: $p = 2q + 13$ (12).

Заметим, что при любых значениях $2q$ p будет принимать целые значения.

Из равенств (3), (6), (9), (12) при помощи последовательных подстановок находим следующие выражения для неизвестных x и y уравнения (1):

$$x = 2z + p = 2(p+q) + p = 3p + 2q = 3(2q+13) + 2q = 8q + 39$$

$$y = 2x + z = 2(8q+39) + p + q = 19q + 91$$

Таким образом, формулы: $x = 8q + 39$, $y = 19q + 91$

при q = 0, ± 1, ± 2, ± 3, $\pm 4 \ldots$ дают все целые решения уравнения (1).

Далее приведены примеры таких решений:

q	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	7	15	23	31	39	47	55	63	71
y	15	34	53	72	91	110	129	148	167

Так как одной из моих целей было показать практическое применение неопределенных уравнений, то рассмотрим одну из практических задач.

Задача: Даны два автомобиля Урал 5557, автомобили отправили в рейс Мыс Каменный – Лабытнанги - Мыс Каменный. Всего понадобилось 4 т дизельного топлива и 2 водителя, чтобы выполнить этот рейс. Нужно определить транспортные затраты, а именно стоимость 1 т дизельного топлива и оплату труда водителей, выполняющих этот рейс, если известно, что всего затрачено 76000 р.

Решение: Пусть x – стоимость 1 т дизельного топлива, а y – оплата труда водителей. Тогда $4x + 2y$ – затрачено на выполнение рейса. А по условию задачи затрачено 76000 р. Получим уравнение: $2x+4y=76000$.

Для решения этого уравнения метод перебора окажется трудоемким процессом. Так что воспользуемся методом «спуска» (методом рассеивания).

Выразим переменную y через x: $y=\frac{76000-2x}{4}$,

выделив целую часть, получим: $y=19000-\frac{2x}{4}$ (1).

Чтобы значение дроби $\frac{2x}{4}$ было целым числом, нужно чтобы, $2x$ было кратно 4. Т.е. $2x = 4z$, где z - целое число. Отсюда: $x=\frac{4z}{2}=2z$.

Значение x подставим в выражение (1):

$$y=19000-\frac{2x}{4}=19000-\frac{2(2z)}{4}=19000-\frac{4z}{4}=19000-z.$$

Итак: $x=2z$, $y=19000-z$.

Т.к. x, $y \geq 0$, то $19000 \geq z \geq 0$, следовательно, придавая z целые значения от 0 до 19000, получим следующие значения x и y:

z	0	1	2	. . .	18999	19000
x	0	2	4	. . .	37998	38000
y	19000	18999	18998	. . .	1	0

Из настоящих данных о транспортных затратах известно, что 1 т дизельного топлива (x) стоит 18000 р., а оплата труда водителей, выполняющих рейс (y) составляет 10000 р. (данные взяты приближенно). По таблице найдем, что значению *x,* равному 18000 и значению *y*, равному 10000 соответствует значение *z,* равное 9000, действительно: $18000 = 2 \cdot 9000$; $10000 = 19000 - 9000$. Задача решена.

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ I-ОЙ СТЕПЕНИ ВИДА $ax + by + cz = d$.

Для выполнения равенства $ax + by + cz = d$ необходимо, чтобы коэффициенты *a, b* и *c* не имели такого общего множителя, который не входил бы в *d*, иначе уравнение не будет решено в целых числах. Если же у этих коэффициентов имеется общий множитель, который содержится в *d,* то он удаляется путем сокращения. При таких результатах может возникнуть 2 случая:

1.) При трех коэффициентов *a, b* и *c* может возникнуть, по крайней мере, два взаимнопростых коэффициента. Например: $12x + 11y + 15z = 141$. В данном примере коэффициенты *a* и *b* взаимнопросты.

Пусть *a*, *b* - взаимнопросты. Перенесем *z* в правую часть и применим к уравнению $ax + by = d - cz$ метод «спуска», считая временно *z* известной величиной. В результате найдем $x = \lambda + bt$, $y = \beta - at$, где λ, β - многочлены 1-ой степени относительно *z*. Придавая *z* и *t* произвольные целые значения, мы получим все целые решения уравнения.

2.) Каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимнопросты. Например: $12x + 15y + 20z = 181$. Здесь коэффициенты *a* и *b* имеют общий множитель 3, *b* и *c* – множитель 5, *a* и *c* – 4 и все три коэффициента взаимнопросты.

Пусть теперь среди коэффициентов *a*, *b* и *c* нет ни одной пары взаимнопростых. Пусть *h* = НОД (*a, b*) и a_1, b_1 - частные от деления *a, b* на *h*. Тогда уравнение примет вид: $ha_1x + hb_1y + cz = d$, откуда $a_1x+b_1y=\frac{d-cz}{h}$. Чтобы левая часть была целым числом, необходимо, чтобы $\frac{d-cz}{h}$ было равно целому числу t. Следовательно,

$$a_1x + b_1y = t \ (2), \qquad cz + ht = d \ (3).$$

Но НОД $(a_1, b_1) = 1$, а потому уравнение (2) имеет целые решения вида:
$x = \lambda + b_1t_1$, $y = \beta - a_1 t_1$, где λ β - многочлены 1-ой степени относительно t с целыми коэффициентами.

Заметим, что НОД $(c, h) = 1$, т.к. h, будучи делителем чисел a и b, не делитель c следует, что уравнение (3) имеет целые решения вида: $z = \gamma + ht_2$, $t = \delta - ct_2$.

Подставим эти значения в уравнения для x и y, мы представим эти неизвестные в виде многочленов 1-ой степени с целыми коэффициентами от t_1 и t_2. Давая t_1 и t_2 произвольные значения (целые), мы получим все целые решения x, y, z исходного уравнения.

Пример 1: Найти любые целые решения уравнения

$$7x+4y+9z=89.$$

Решение: Уравнение относится к первому типу уравнений, поэтому:

$$7x+4y=89-9z,$$

выразим y: $$y=\frac{89-9z-7x}{4}=22-3z-2x+\frac{1+3z+x}{4}.$$

Для того, чтобы коэффициент y имел целое значение, необходимо, чтобы выражение $\frac{1+3z+x}{4}$ также имело целое значение, пусть $\frac{1+3z+x}{4}=t$, или $1+3z+x=4t$,

отсюда: $$x=4t-1-3z,$$

тогда: $$y=22-3z-2(4t-1-3z)+t=22-3z-8t+2+6z+t=24+3z-7t.$$

Итак: $$x=4t-1-3z, \quad y=24+3z-7t.$$

Придавая z и t целые значения, получим решение исходного уравнения:

t	0	1	2
z	1	2	3
x	-4	-3	-2
y	27	23	21

Теперь рассмотрим практическую задачу

Задача: Дана однокомнатная квартира. Стоимость содержания жилья на 1 м^2 составляет 8 р., стоимость теплоэнергии на 1 м^2 равна 33 р., стоимость 1 м^3 воды на человека – 16 р. Требуется определить какую площадь имеет квартира, какая площадь отапливается в этой квартире и норматив потребления воды на человека в течение месяца, если известно, что в квартплате за месяц всего начислено 1416 р. (Все данные в задачи взяты приближенно).

Решение: Обозначим переменными: x количество кв. м в квартире, y – количество кв. м в квартире, которым отведена теплоэнергия, а z – количество воды (м^3), потребляемое на человека. Тогда $8x+33y+16z$ - всего начислено в квартплате за месяц. А по условию задачи, всего начислено 1416 р. Получим уравнение: $8x+33y+16z=1416$.

Выразим x: $x=\dfrac{1416-33y-16z}{8}$.

Выделив целую часть уравнения, получим:

$x=177-4y-2z-\dfrac{y}{8}=177-4y-2z-t$, пусть выражение $\dfrac{y}{8}$ будет целым, чтобы коэффициент x тоже был целым. Заменим это выражение на t ($t \in \mathrm{Z}$):

$t=\dfrac{y}{8} \Rightarrow y=8t$.

Теперь подставим значение y в уравнение $x=177-4y-2z-t$:

$$x=177-4(8t)-2z-t=177-32t-2z-t=177-33t-2z.$$

Значит

$$x=177-33t-2z, \qquad y=8t.$$

Придавая z и t произвольные целые значения, получим решение исходного уравнения:

t	1	2
z	4	5
x	136	101
y	8	16

Нам известно, что однокомнатная квартира имеет площадь 33 м^2, в ней отапливается площадь, равная 32 м^2, а норматив потребления воды на человека составляет 6 м^3. Получается, $x = 33,\quad y = 32,\quad z = 6.$ При таких значениях коэффициентов x, y и z значение t равно 4. Проверим:

$$33 = 177 - 33 \cdot 4 - 2 \cdot 6$$
$$33 = 177 - 132 - 12$$
$$33 = 33$$

$$32 = 8 \cdot 4$$
$$32 = 32$$

Таким образом, мы решили задачу.

5. ***ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ.***

Задача 1: Решить уравнение: *xy + 3x - 5y = -3*

Решение:

$$x(y+3) - 5y - 15 = -3 - 15,$$
$$x(y+3) - 5(y+3) = -18,$$
$$(y+3)(x-5) = -18.$$

Из последнего уравнения следует, что числа *(y + 3)* и *(x - 5)*- делители числа *-18: ±1; ±2; ±3; ±6; ±9; ±18.*

Отсюда 12 систем уравнений:

$$\begin{cases} x-5=1 \\ y+3=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=2 \\ y+3=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=3 \\ y+3=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=6 \\ y+3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-5=-2} \\ \boldsymbol{y+3=9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5=9 \\ y+3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=-5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=18 \\ y+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=-4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=-1 \\ y+3=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=15 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=-3 \\ y+3=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=-6 \\ y+3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=-9 \\ y+3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-5=-18 \\ y+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-13 \\ y=-2 \end{cases}$$

Ответ: (6;-21), (7;-12), (8;-9), (11;-6), (14;-5), (23;-4), (4;15), (2;3), (-1;0), (-4;-1), (-13;-2), (3;6).

Задача 2: Решить уравнение $x^3 + 91 = y^3$

Решение:

$$x^3 - y^3 = -91$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = -91,$$
$$-91 : \pm 1; \pm 7; \pm 13; \pm 91$$
$$1.\begin{cases} x-y=-1 \\ x^2+xy+y^2=91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=91 \end{cases}$$
$$y^2-2y+1+y^2-y+y^2-91=0$$
$$y^2-y-30=0$$

$$D=1+120=121$$
$$y_1=6,\ y_2=-5,$$
$$x_1=5,\ x_2=-6$$

$$2.\begin{cases} x-y=-7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-7 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=13 \end{cases}$$

$y^2+49-14y+y^2-7y+y^2-13=0$

$y^2-7y+12=0$

$D=49-48=1$

$y_1=4,\ y_2=3$

$x_1=-3,\ x_2=-4$

$$3.\begin{cases} x-y=-13 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-13 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=7 \end{cases}$$

$y^2-26y+169+y^2-13y+y^2-7=0$

$y^2-13y+54=0$

$D=169-216=-47<0-$ *нет решений.*

$$4.\begin{cases} x-y=-91 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-91 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=1 \end{cases}$$

$y^2-182y+8281+y^2-91y+y^2-1=0$

$y^2-91y+2760=0$

$D=8281-11040<0-$ *нет решений.*

$$5.\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=-91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=-91 \end{cases}$$

$y^2+2y+1+y^2+y+y^2+91=0$

$3y^2+3y+92=0$

$D=9-1104=-1095<0-$ *нет решений.*

$$6.\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+7 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=-13 \end{cases}$$

$y^2+14y+49+y^2+7y+y^2+13=0$

$3y^2+21y+62=0$

$D=441-744=-303<0-$ *нет решений.*

$$7.\begin{cases} x-y=13 \\ x^2+xy+y^2=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+13 \\ (y-1)^2+y(y-1)+y^2=-7 \end{cases}$$

$$y^2+26y+169+y^2+13y+y^2+7=0,$$
$$3y^2+39y+176=0$$
$$D=1521-2112=-591<0-нет\ решений.$$

$$8.\begin{cases}x-y=91\\x^2+xy+y^2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+91\\(y-1)^2+y(y-1)+y^2=-1\end{cases}$$
$$y^2+182y+8281+y^2+91y+y^2+1=0,$$

$$3y^2+273y+8282=0$$
$$D<0-нет\ решений.$$

Ответ: (5,6); (-6,-5); (-3,4); (-4,3).

Задача 3: Решить уравнение $x^2 - 656xy - 657y^2 = 1983$

Решение:

$$x^2-656xy-(656+1)y^2=1983$$
$$x^2-656xy-656y^2-y^2=1983$$
$$(x^2-y^2)-656y(x+y)=1983$$
$$(x-y)(x+y)-656y(x+y)=1983$$
$$(x+y)(x-656y)=1983$$
$$1983:\pm1;\pm3;\pm661;\pm1983.$$
$$1.\begin{cases}x+y=1\\x--657y=1983\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-y\\1-y-657y=1983\end{cases}$$
$$y=\frac{-1982}{658}-не\ является\ целым\ числом,\ значит\ решений\ нет$$

$$2.\begin{cases}x+y=3\\x-657y=661\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$
$$3.\begin{cases}x+y=661\\x-657y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=660\\y=1\end{cases}$$
$$4.\begin{cases}x+y=1983\\x-657=1\end{cases}$$

Нет решений.

$$5.\begin{cases}x+y=-1\\x-657y=-1983\end{cases}$$

Нет решений.

$$6.\begin{cases} x+y=-3 \\ x-657y=-661 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$7.\begin{cases} x+y=-661 \\ x-657y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-660 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$8.\begin{cases} x+y=-1983 \\ x-657y=-1 \end{cases}$$

Нет решений.

Ответ: (4; -1); (-660; -1); (660; 1); (-4; 1).

6. Практическое применение теории диофантовых уравнений.

1. Неожиданно, лет 20-30 назад, было осознано, что эту чисто абстрактную теорию можно использовать для построения алгоритмов, которые нужны для криптографии, чтобы зашифровывать и безопасно передавать секретные сообщения, а также снимать и класть деньги в банкоматах и т. п. Теория эта оказалась востребована на практике. Яркий пример: в девяностые годы, банкиры обратились к математикам с просьбой помочь в переводе денег из дальних регионов в Москву. В России есть целая Академия криптографии и научно-исследовательские организации, которые используют такие разработки.
2. Знаменитый мост Золотые Ворота был построен с применением диофантовых уравнений.

3. Прежде всего, диофантовы уравнения интересны сами по себе. Например, Великая теорема Ферма, одна из самых популярных теорем математики, представляет из себя диофантово уравнение. Обычно рассматриваются уравнения с положительными корнями, но и отрицательные корни также входят в область определения.
4. Вне чистой математики диофантовы уравнения возникают обычно тогда, когда исследуются сложные дискретные системы. Часто такое встречается в молекулярной физике и органической химии при поиске оптимальных структур. Даже подбор коэффициентов в химических уравнениях иногда превращается в решение систем диофантовых уравнений.
5. Также такие уравнения используются в различных компьютерных алгоритмах. Например, при расшифровке алгоритма RSA, который используется во многих системах цифровой подписи и шифрования. Похожие случаи, связанные с решением диофантовых уравнений, возникают в алгоритмах обработки видео, проектирования осветительных систем (для расчета стробоскопических эффектов) и разработке систем управления сложными машинами (например, вертолетами).
6. Уравнения такого типа иногда встречаются в экономике и теории вероятностей. Чаще всего это линейные диофантовы уравнения. Их связь с реальной жизнью можно легко показать на пальцах: допустим, у кого-то есть 1000 рублей и он хочет купить карандашей по 40 рублей и ручек по 35 рублей. Сколькими способами можно это сделать?
7. Стоит упомянуть одно интересное историческое приложение, использующее свойства диофантовых уравнений. Согласно некоторым источникам, китайские военачальники, чтобы узнать численность своей армии, давали несколько последовательных команд «В колонну по 7 становись!», «В колонну по 11 становись!», «В колонну по 13 становись!», «В колонну по 17 становись!» и в каждом случае выясняли, сколько солдат получилось в последнем ряду. После этого (только по полученным остаткам!) вычислялось общее количество солдат.

7. ***Примеры решения диофантовых уравнений***

Задача 1: Некто покупает в магазине вещь стоимостью 19 р. У него имеются лишь 15-трехрублевок, у кассира же лишь 20-пятирублевок. Можно ли расплатится и как?

Решение: Задача сводится к решению целых положительных числах диофантова уравнения: $3x - 5y = 19$, где $x \leq 15,\ y \leq 20$

$$x = \frac{19+5y}{3} = \frac{5y}{3} + \frac{19}{3} = y + 6 + \frac{2y+1}{3}$$

Из уравнения следует, что x при целом значении y будет иметь целое значение в том случае, если выражение $\frac{2y+1}{3}$ также будет иметь целое значение.

Обозначим $\frac{2y+1}{3} = t$, следовательно $2y + 1 = 3t$

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}$$

Получается, неизвестное y принимает целое значение при целом t тогда, когда $\frac{t-1}{2}$ будет принимать целое значение. Пусть это выражение равно $\frac{t-1}{2} = z$ или $t - 1 = 2z$,

Следовательно $t = 2z + 1$.

При любых целых значениях z t будет принимать целые значения. При помощи последовательных подстановок найдем: $x = 5z + 8$ и $y = 3z + 1$.

Ввиду того, что $x, y > 0$ и учитывая условия задачи, легко установить, что $0 \leq z < 2$, т.е. z может принимать только два значения: 0 и 1.

Отсюда вытекает 2 возможных значения:

x	8	13
y	1	4

Ответ: (8;1), (13;4).

Задача 2: Можно ли отвесить 28 г. некоторого вещества на чашечных весах, имея только 4 гири весом в 3 г. и 7 гирь весом в 5г.?

Решение: Пусть x – количество гирь массой 3 грамма, y – количество гирь массой 5 грамм. Составим и решим уравнение:

$3x + 5y = 28$

Для решения данного уравнения воспользуемся методом «спуска».

Выразим переменную x через y:

$$x = \frac{28-5y}{3} = 9 - y + \frac{1-2y}{3} \quad (1)$$

Чтобы значение дроби $\frac{1-2y}{3}$ было целым числом, нужно чтобы, 1-2y было кратно 3. Т.е. $1 - 2y = 3z$, где z – целое число. Отсюда $y = \frac{1-3z}{2} = -z + \frac{1-z}{2}$.

Заменим $\frac{1-z}{2} = h$, $1 - z = 2h$, $z = 1 - 2h$.

После последовательных подстановок найдем: $x = 11 - 5h$ и $y = 3h - 1$.

Из условия задачи следует, что $0 < x \le 4$, $0 < y \le 7$. Придавая h целые значения от 1,2 до 2,2 , получим $x = 1$ и $y = 5$.

Ответ: можно, если 5 гирь по 5 грамм и 1гирю 3 грамма.

Задача 3: Покупатель приобрел в магазине на 21 р. товара. Но у него в наличии денежные знаки только 5 - рублевого достоинства, а у кассира – 3 - рублевого. Требуется знать, можно ли при наличии денег расплатиться с кассиром и как именно?

Решение: x – число 5 - рублевок, y – 3 - рублевок.

$$5x - 3y = 21$$
$$3y = 5x - 21,$$
$$y = \frac{5}{3}x - 7 = x - 7 + \frac{2}{3}x,$$
$$\frac{2}{3}x = t, x = \frac{3t}{2};$$

$$y = \frac{3}{2}t - 7 + t = \frac{5}{2}t - 7.$$

По условию x > 0, y > 0, значит $\frac{5}{2}t - 7 > 0, \quad t > 2{,}8$.

Кроме того, t – четное, иначе ни x, ни y не будет целыми.

При t = 4, 6, 8, … имеем:

t	4	6	8	10	12	14	16	18	20
x	6	8	12	15	18	21	24	27	30
y	3	8	13	18	23	28	33	38	43

Задача 4: Имеется 110 листов бумаги. Требуется из них сшить тетради по 8 листов и по 10 листов в каждой. Сколько надо сшить тех и других?

Решение: x – число 8 - листовых тетрадей, y – число 10 - листовых тетрадей.

$$8x + 10y = 110$$

$$x = \frac{110 - 10y}{8} = 13 - y + \frac{3 - y}{4}, \qquad \text{но } x, y > 0$$

$$\frac{3 - y}{4} = t, \quad y = 3 - 4t, \quad x = 13 - y + t = 10 + 5t,$$

$$\begin{cases} \mathbf{10 + 5t > 0} \\ \mathbf{3 - 4t > 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{t > -2} \\ \mathbf{t < \frac{3}{4}} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{-2 < t < \frac{3}{4}}$$

Значит t = 0 или t = - 1

t = -1: x = 5 y = 7

t = 0: x = 10 y = 3

Ответ: (5;7), (10;3).

Задача 5: Многие старинные способы отгадывания чисел и дат рождения основываются на решении диофантовых уравнений. Тех, например, чтобы отгадать дату рождения (месяц и число) собеседника, достаточно узнать у него сумму, получаемую от сложения двух произведений: числа даты (x) на 12 и номера месяца (y) на 31.

Пусть сумма произведений, о которых идет речь, равна 330. Найти дату рождения.

Решение: Решим неопределенное уравнение:

$$12x + 31y = 330$$

$$x = \frac{330 - 31y}{12} = 27 - 3y + \frac{5y+6}{12} = 27 - 3y + y_1,$$

$$\frac{5y+6}{12} = y_1, \quad 5y + 6 = 12y_1,$$

$$y = \frac{12y_1 - 6}{5} = 2y_1 + \frac{2y_1 - 6}{5} = 2y_1 + y_2,$$

$$2y_1 - 6 = 5y_2,$$

$$y = \frac{5y_2 + 6}{2} = 2y_2 + \frac{y_2 + 6}{2} = 2y_2 + y_3,$$

$$\frac{y_2 + 6}{2} = y_3, \ \ y_2 = 2y_3 - 6,$$

$y = 2y_1 + y_2 = 2(2y_2 + y_3) + y_2 = 5y_2 + 2y_3 = 5(2y_3 - 6) + 2y_3 = 12y_3 - 30$

$x = 27 - 3(12y_3 - 30) + 2y_2 + y_3 = 27 - 36y_3 + 90 + 2(2y_3 - 6) + y_3 =$

$= 27 - 36y_3 + 90 + 5y_3 - 12 = 105 - 31y_3$

$x = 12y_3 - 30,$

$y = 105 - 31y_3$

Т.к. $0 < x \le 31$, $0 < y \le 12$, то легко убедиться, что единственным решением является: $y_3 = 3$

$$x = 12, y = 6$$

Ответ: дата рождения: 12 число 6 - го месяца, т.е. 12 июня.

Задача 6: Решить уравнение: $16x + 4y = 1830$

НОД (16, 4) = 4, 1830: 4 $\Rightarrow$ в целых числах уравнение не имеет решений .

Ответ: нет решений.

Задача 7: Решить в целых числах уравнение $3x + 5y = 7$.

Решение: $3x + 5y = 7$

Выразим $x = 2 - y + \frac{1-2y}{3}$

При целом значении y x будет иметь целое значение в том случае, если выражение $\frac{1-2y}{3}$ также будет иметь целое значение.

Обозначим $\frac{1-2y}{3} = t$

$1 - 2y = 3t$

$y = \frac{1-3t}{2} = -t + \frac{1-t}{2}.$

При целом значении t y будет иметь целое значение в том случае, если выражение $\frac{1-t}{2}$ также будет иметь целое значение.

Обозначим $\frac{1-t}{2} = p$, $1 - t = 2p$, $t = 1 - 2p$.

После последовательных подстановок найдем: $x = 4 - 5p$ и $y = 3p - 1$, где $p \in N$.

Подставляя различные значения p, мы получим все целые решения исходного уравнения.

Задача 8: Решить уравнение: $xy = x + y + 3$.

Решение: $xy = x + y + 3$

$xy - x - y + 1 = 4$

$x(y - 1) - (y - 1) = 4$

$(x - 1)(y - 1) = 4$

Так как $4 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2 = -2 \cdot (-2) = -1 \cdot (-4) = -4 \cdot (-1)$. Имеем

1) $\begin{cases} y-1=1 \\ x-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-1=4 \\ x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-1=2 \\ x-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-1=-2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y-1=-1 \\ x-1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-1=-4 \\ x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases}$

Ответ: (2;5), (0;-3), (3;3), (-1;-1), (5;2), (-3;0).

Задача 9: Решить в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 69$.

Решение: $x^2 - y^2 = 69$
$(x - y)(x + y) = 69$

Так как $69 = 1 \cdot 69 = 69 \cdot 1 = 23 \cdot 3 = 3 \cdot 23$. Имеем

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 34 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 69 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = -34 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 23 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 \end{cases}$

Так как $-34 \notin N$, $-10 \notin N$. Следовательно уравнение имеет два решения: (35;34), (13;10)

Ответ: (35;34), (13;10).

Задача 10: Доказать, что уравнение $x^3 - y^3 = 1993$ не имеет решений в целых числах.

Решение: $x^3 - y^3 = 1993$
$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1993$

Так как $1993 = 1 \cdot 1993 = 1993 \cdot 1 = -1 \cdot (-1993) = -1993 \cdot (-1)$.Имеем

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1993 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 1993 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + y - 664 = 0 \end{cases}$

Уравнение $y^2 + y - 664 = 0$ не имеет корней в целых числах. Следовательно и система не имеет решений в целых числах.

2) $\begin{cases} x - y = 1993 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1993 \\ (y+1993)^2 + y(y+1993) + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1993 \\ y^2 + 1993y + 1324016 = 0 \end{cases}$

Уравнение $y^2 + 1993y + 1324016 = 0$ не имеет корней, а значит и сама система не имеет решений.

3) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + xy + y^2 = -1993 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ (y-1)^2 + y(y-1) + y^2 = -1993 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ 3y^2 - 3y + 1994 = 0 \end{cases}$

Уравнение $3y^2 - 3y + 1994 = 0$ не имеет корней, а значит и система уравнений не имеет решений.

4)

$$\begin{cases} x - y = -1993 \\ x^2 + xy + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1993 \\ (y-1993)^2 + y(y-1993) + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1993 \\ 3y^2 - 5979y + 3972050 = 0 \end{cases}$$

Уравнение $3y^2 - 5979y + 3972050 = 0$ не имеет корней, а значит и сама система не имеет решений.

Данное уравнение не имеет решений в целых числах, что и требовалось доказать.

Задача 11. Найдутся ли три различных целых числа, одно из которых равно разности двух оставшихся, а другое равно частному двух оставшихся?

Решение: Пусть x – первое число, y – второе число, z – третье число.

Составляем систему уравнений: $\begin{cases} x = y - z \\ y = \dfrac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x = yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yz \\ yz = y - z \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = yz \\ yz - y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yz \\ y(z-1) = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yz \\ y = \dfrac{z}{1-z} \end{cases}$$

При $z = 0$ и $z = 1$задача не имеет решений. Возьмем $z = 2$, тогда $y = -2$, $x = -4$.

Проверка: $-4 = (-2) - 2$, $-2 = (-4)/2$.

Ответ: да, например, числа -4, 2 и -2 .

Задача 12. У Лены три набора, в каждом из которых одинаковое количество ручек (больше 1). У Юли несколько (больше 1) наборов ручек, по 5 штук в каждом.

а) При каком количестве наборов у Юли, количество всех ручек у Лены нечетно, если всего у девочек 105 ручек?

б) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в 12 наборов по 12 ручек в каждом?

Решение:

а) Пусть в каждом Ленином наборе x ручек, а у Юли y наборов. Тогда получаем уравнение: $3x + 5y = 105$.

По условию у Лены нечетное число ручек, значит, 3x- нечетно, и, соответственно, x- нечетно.

Выразим из уравнения $3x = 5(21 - y)$, значит, x делится на 5.

Кроме того, $3x < 105$.

$x = 35 - \frac{5}{3}y$

Далее воспользуемся методом перебора (учитывая, что $x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}$ и x- нечетно):

y	6	12	18
x	25	15	5

б) Используя те же обозначения, получаем уравнение:

$$3x + 5y = 144.$$

Выразим $x = 48 - \frac{5}{3}y$

Достаточно подобрать целые корни, большие единицы. Например, подходят числа $y = 27$ и $x = 3$.

Ответ: можно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диофантовы уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой.

Умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, а в практической деятельности значительно сэкономить затраты средств и времени.

В школьном курсе математики диофантовы уравнения не изучаются, но, например, в заданиях группы С6 в ЕГЭ встречаются диофантовы уравнения, также диофантовы уравнения часто встречаются и в олимпиадных задачах.

Мною было изучено четыре метода решения неопределенных уравнений:

1. Решение неопределенных уравнений 1- ой степени вида $ax + by = c$ методом «спуска».
2. Решение неопределенных уравнений 1- ой степени вида $ax + by = c$ методом перебора.

3. Решение неопределенных уравнений вида $ax + by + cz = d$.

4. Метод преобразования в произведение.

Изучая диофантовы уравнения, показала практическое их применение.

Именно Диофант положил начало всему этому большому математическому разделу, в чем его огромнейшая заслуга.

Данная работа будет полезна учителям и ученикам старших классов для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам.

9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Готовимся к олимпиадам по математике: Учеб. – метод. пособие / А.В. Фарков. – М.: Издательство «Экзамен», 2006г.

2. Я. И. Перельман. Занимательная алгебра – М: Наука; 1970.

3. Н. Я. Виленкин и др. «За страницами учебника математики»: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. Для учащихся 10–11 кл. общеобразоват. учреждений – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.

4. Глейзер Г.И. История математики в школе. 7-8 классы.//М.«Просвещение», 1982 г.

5. А. Жуков. Неопределенные уравнения. Энциклопедия для детей, том 11. Математика. – М.: Просвещение, 1990.

6. Акимова С. Занимательная математика. – Санкт-Петербург: Издательство «Тригон», 1997 г.

7. Башмакова, И. Диофант и Диофантовы уравнения/ И. Башмакова. – Москва: ЛКИ, 2007 г.

8. Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах/ А.О. Гельфонд. – Москва: Либроком, 2010 г.

9. Малинин В. Журнал «Математика», № 21, 2001г.

10. Малинин В. Журнал «Математика», № 22, 2001 г.

Список использованных источников информации

1. Википедия – свободная энциклопедия - http://wikipedia.org
2. Информационно-образовательный портал Veni Vidi Vici – www.vevivi.ru
3. Информационный портал Российской Академии Наук - eqworld.ipmnet.ru
4. Математическая энциклопедия – dic.academic.ru
5. Научный журнал «Молодой учитель» - www.moluch.ru